ABN8100
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 11/08/94 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 03009917
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B47532
035/2: : |a (CaOTULAS)160037276
040: : |a DLC |c ViU |d ViU |d CU-SB |d CStRLIN |d MiU
050/1:0 : |a QA553 |b .S6
100:1 : |a Simon, Maximilian, |d 1844-1918.
245:00: |a Analytische geometrie des raumes ... |c von Dr. Max Simon.
260: : |a Leipzig, |b G. J. Göschen, |c 1900-01.
300/1: : |a 2 v. |b diagr. |c 20 cm.
440/1: 0: |a Sammlung Schubert. |v 9; 25
505/1:0 : |a 1. T. Gerade, Ebene, Kugel.--2. T. Die flächen zweiten Grades.
650/1: 0: |a Geometry, Analytic |x Solid
998/1: : |c RSH |s 9125



Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

„Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Herbst 1900:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mk. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Band IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg.

„ V: **Niedere Analysis** von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

„ XI: **Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Band XV: **Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVI: **Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg.

„ XVIII: **Geschichte der Mathematik.**

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Ferd. Paul in Budapest.

„ XXI: **Dyanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXII: **Technische Mechanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXIII: **Geodäsie.**

„ XXIV: **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXVI: **Räumliche projektive Geometrie.**

„ XXVII: **Geometrische Transformationen** von Dr. Karl Doehlemann in München.

„ XXVIII: **Theorie der höheren algebraischen Kurven.**

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXX: **Elliptische Funktionen** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXXI: **Hyperelliptische und Abelsche Funktionen** von E. Landfried in Strassburg.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen.**

„ XXXIII: **Invariantentheorie** von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

„ XXXIV: **Liniengeometrie** von Dr. Konrad Zindler in Wien.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie.**

„ XXXVI: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXXVII: **Kinematik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXXVIII: **Potentialtheorie.**

„ XXXIX: **Mechanische Wärmetheorie.**

„ XL: **Theoretische Optik** von Dr. J. Classen in in Hamburg.

Sammlung Schubert XXV

Analytische Geometrie des Raumes

II. Teil: Die Flächen zweiten Grades

von

Dr. Max Simon
Strafsburg i. E.

Mit 29 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1901

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Die Flächen zweiten Grades und zweiter Klasse in allgemeiner Behandlung.

§ 1. Die homogene Gleichung zweiten Grades mit vier Variabeln.

Die Gleichung der Kugel ist sowohl in Punkt- als in Ebenen- (als in Linien-) koordinaten quadratisch; die Kugel gehört daher zu den Flächen zweiten Grades und zweiter Klasse. Wir erinnern an die Erklärung in S. S. VIII § 26, wonach eine Fläche n. Grades, eine F^n nach Reye, von jeder Graden in n Punkten geschnitten wird, also durch eine Gleichung n. Dimension in Punktkoordinaten dargestellt wird, während eine Fläche n. Klasse, φ^n nach Reye, in Ebenenkoordinaten von n. Dimension ist und daher durch jede Gerade n Ebenen der φ^n gehen.

Die allgemeinste Form einer Gleichung zweiten Grades oder besser zweiter Dimension in drei Variabeln ist (vgl. S. S. VIII S. 116 etc.).

$$1)\quad a_{11} r^2 + 2 a_{12} rs + 2 a_{13} rt + 2 a_{14} r + a_{22} s^2 + 2 a_{23} st + 2 a_{24} s + a_{33} t^2 + 2 a_{34} t + a_{44} = 0.$$

Wir machen die Gleichung homogen durch Einführung einer Hilfsvariabel, indem wir setzen: r gleich $s_1 : s_4$; s gleich $s_2 : s_4$; t gleich $s_3 : s_4$ und die Gleichung 1) mit s_4^2 multiplizieren; sie nimmt dann die bequeme Form an:

$$2)\qquad \Sigma a_{ik} s_i s_k = 0,$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ und die Indices i und k der Reihe nach die Zahlen 1 bis 4 durchlaufen. Die linke Seite von 2) heifst

homogene Form zweiten Grades von vier Variabeln, und werde mit G^2 bezw. G bezeichnet. Falls die Variabeln r, s, t Punktkoordinaten vertreten, so schreiben wir dafür x, y, z, wie sonst, und setzen s_1 gleich x_1 etc, wird dann x_4 gleich 1 gesetzt, so ist $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Stellen r, s, t Ebenenkoordinaten dar, so schreiben wir für sie u, v, w, wenn es sich um Achsenkoordinaten handelt; die allgemeinen Ebenenkoordinaten sind homogen und werden dadurch gekennzeichnet, daſs wir für s das Zeichen σ setzen. Ist dann $\varphi(\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3) = 1$, so sind die σ die Koordinaten der Hesseschen (bezw. Göpelschen) Normalform.

Werden durch die s Punkte bestimmt, so ist $G^2 = 0$ die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades, der F^2; bestimmen uns die s Ebenen, so ist $G^2 = 0$ die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Klasse, der φ^2; lassen wir die Bedeutung der s unbestimmt, so sagen wir: $G^2 = 0$ stelle ein Gebilde zweiter Ordnung G^2 dar. Ein Wertsystem der s ist { einem Element des Gebildes G^2, sobald es die Gleichung 2) erfüllt, das Wertsystem 0, 0, 0, 0 schlieſsen wir dadurch aus.

Aufgabe 1. Durch wie viel seiner Elemente ist ein Gebilde zweiter Ordnung bestimmt?

Die Form 2) enthält zehn Konstanten, da aber die Valenz der Gleichung 2) durch Division mit einer Konstanten sich nicht ändert, und nicht alle a, ja sogar nicht einmal alle Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, zugleich verschwinden dürfen, so können wir durch einen von ihnen z. B. a_{11} dividieren, und die Form 2) hängt also nur von den 9 Quotienten ab, welche linear darin eingehen. Also:

Ein Gebilde G^2 ist durch 9 seiner Elemente im allgemeinen bestimmt.

Aufgabe 2. Wann ist G^2 durch 9 seiner Elemente nicht bestimmt?

Sind zunächst acht Elemente gegeben, so kann das neunte beliebig gewählt werden, und es giebt unzählig viele G^2, welche in acht Elementen übereinstimmen. Man erhält dann zur Bestimmung der neun Quotienten acht lineare Gleichungen und kann dann acht von ihnen durch den neunten ausdrücken. Nehmen wir an, es wäre durch a_{11} dividiert und bezeichnen dann $a_{ik} : a_{11}$ mit b_{ik}, so lassen

sich z. B. die acht ersten Quotienten durch den letzten b_{44} ausdrücken. Es wird $b_{ik} = S_{ik} + S'_{ik} . b_{44}$, wo die S ganz bestimmte Funktionen der acht gegebenen Elemente oder Wertsysteme s, also ganz bestimmte Zahlen sind. Wir erhalten also: $G^2(a) \} G^2(b_{ik}) \} G^2(S_{ik}) + b_{44} G^2 (S'_{ik})$, oder kürzer, wenn $S_{ik} = c_{ik}$ und $S'_{ik} = d_{ik}$ gesetzt wird:

$$G^2(a) \} G^2(c) + b_{44} G^2(d) \} G^2(c) + \lambda G^2(d),$$

wo λ oder b_{44} ein Parameter ist.

Es sind aber $G^2(c) = 0$ und $G^2(d) = 0$ die Gleichungen zweier Gebilde C und D, welche die acht gegebenen Elemente gemeinsam haben; da die Gleichungen $G^2(c, s^{(\nu)}) + \lambda G^2(d, s^{(\nu)}) = 0$ für jeden Wert des λ erfüllt sind, so mufs $G^2(c, s^{(\nu)}) = 0$ und $G^2(d s^{(\nu)}) = 0$ sein. $G^2(c, s) = 0$ und $G^2(d, s) = 0$ haben aber eine einfache unendliche Menge von Lösungen gemein, die wir als das Schnittgebilde von C und D bezeichnen. Für jedes Element des Schnitts wird aber auch $G(a) = 0$, also stellt $G(a) = 0$ ein Gebilde dar, das den Schnitt von $G^2(c)$ und $G^2(d)$ enthält bezw. durch den Schnitt beider Flächen hindurchgeht, also:

Soll das Gebilde G^2 durch neun seiner Elemente bestimmt werden, so dürfen die neun Elemente nicht auf dem Schnitte zweier Gebilde zweiten Grades liegen.

Zwei Gebilde, zweiten Grades, welche acht Elemente gemeinsam haben, haben unzählig viele andere, die des Schnittes gemeinsam.

Zur Abkürzung bezeichnen wir fortab das Gebilde zweiter Ordnung oder zweiten Grades als „Quadrik“.

Aufgabe 3. Die Quadriks, welche durch sieben gegebene Elemente gehen.

Sind sieben von den Elementen eines Quadriks gegeben, so kann man die neun Quotienten durch zwei von ihnen ausdrücken, und erhält wie in der Aufgabe 2

$$G^2(a) \} G^2(b) + \lambda G_2(c) + \mu G^2(d)$$

λ und μ sind Parameter; zu $G^2(a)$ gehören alle Elemente, für welche gleichzeitig $G^2(b)$ (oder B) $= 0$; $C = 0$, $D = 0$ sind.

Dies sind zunächst die sieben gegebenen, wie man am einfachsten sieht, wenn man λ und $\mu = 0$ setzt, dann $\lambda = 0$,

dann $\mu = 0$; aber aufserdem haben die drei Flächen noch ein achtes Element gemein, das im allgemeinen von den sieben verschieden ist, da, wie die Algebra lehrt, drei Gleichungen, zweiten Grades im allgemeinen acht gemeinsame Lösungen besitzen. Also:

Zwei Quadriks, welche sieben Elemente gemeinsam haben, haben auch noch ein achtes, durch die sieben ersten bestimmtes Element gemeinsam.

Die Quadriks, welche acht Elemente gemeinsam haben, bilden generaliter eine Schar oder Reihe, aufser wenn diese acht Elemente drei Quadriks gemein sind, welche nicht zur selben Schar gehören.

Es kann vorkommen, dafs die Form des einen Grundquadriks einer Schar ein Produkt zweier Faktoren ersten Grades ist; so dafs $G(a) = G^2(c) + \lambda H_1 K_1 = 0$, die Schar darstellt, wo $H_1 = 0$, $K_1 = 0$ je nachdem eine Ebene oder einen Punkt bedeuten, wir beweisen als

Aufgabe 4. Zwei Quadriks, deren Schnitt einem Gebilde ersten Grades angehört, besitzen noch einen zweiten Schnitt, der einem zweiten Gebilde ersten Grades angehört.

Ist
$$G_2(a) = G^2(b) + \lambda H_1 K_1 = 0,$$
so gehören zu $G^2(a)$ die Elemente, welche den Gebilden $G^2(b) = 0$, $H_1 = 0$ gemeinsam sind, und die, welche $G^2(b) = 0$ und $K_1 = 0$ gemeinsam sind. Umgekehrt ist klar, dafs, wenn die $G(a) = 0$ und $G(b) = 0$ gemeinsamen Elemente einem Gebilde erster Ordnung $H_1 = 0$ angehören $G^2(a) - \mu G^2(b) = H_1 K_1$ sein mufs.

Die beiden Schnitte ersten Grades und damit die beiden Gebilde H_1 und K_1 können zusammenfallen, so dafs $G^2(a) = G^2(b), + \lambda H_1^2$ ist. Dann zählt man diesen Schnitt doppelt, und sagt, dafs $G^2(a)$ und $G^2(b)$ sich in deren Schnitt $H_1 = 0$ berühren.

Ist G^2 eine F^2, so ist $H_1 = 0$ eine Ebene ε, der Schnitt ist, wie man erkennt, wenn man eine Koordinatenebene parallel der Ebene ε annimmt, ein Kegelschnitt, eine Kurve zweiten Grades C^2. Ist G^2 eine φ^2, so ist $H_1 = 0$ die Gleichung eines Punktes P, das Schnittgebilde $H_1 = 0$, besteht aus der Gesamtheit aller Ebenen der φ^2, welche durch den Punkt P gehen und die φ^2 berühren, sie bilden den

Tangentenkegel von P an die φ^2. Also spaltet sich der eben bewiesene Satz in die Sätze.

Zwei F^2, welche einen Kegelschnitt gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Kegelschnitt gemein.

Zwei φ^2, welche einen Tangentenkegel gemeinsam haben, haben noch einen zweiten Tangentenkegel gemeinsam.

Aufgabe 5. Es soll dieser Satz für die Kugel mittels der eben entwickelten Methode bewiesen werden.

Ein Kreiskegel ist, weil er von keiner Geraden, die nicht ganz auf dem Kegel liegt, in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, eine F^2. Es sei die Spitze des Kegels der Anfangspunkt, als z-Ebene diene die Parallele zur Ebene des Kreises. Wir definieren den Kegel als Gesamtheit aller Geraden, welche die Spitze mit den Punkten des Grundkreises verbinden. Wir haben dann

$$1) \qquad \frac{x}{x_k} = \frac{y}{y_k} = \frac{z}{d},$$

wo d der Abstand des Grundkreises von der Spitze. Der Grundkreis ist Schnitt der Kugel $K = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$ und der Ebene $z = d$. Somit haben wir für den Kegel Ke.

$$2) \quad Ke = (dx - az)^2 + (dy - bz)^2 + (dz - cz)^2 - r^2 z^2 = 0,$$

womit auch rechnerisch bewiesen, daſs der Kegel eine F^2.

Die Formel $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ zeigt ohne Rechnung, daſs jedes der vier Glieder der Differenz $Ke - d^2 K$ den Faktor $(d - z)$ hat, also ist

$$Ke - K = (d - z)\, H_1(x, y, z).$$

Aufgabe 6. Die Rechnung für schiefwinklige Koordinaten durchzuführen.

Der Schnitt zweier Quadriks wird von einem Gebilde ersten Grades H_1, das nicht ganz zu ihm gehört, in vier Elementen geschnitten. Sind die Quadriks F^2's, so ist H_1 eine Ebene, sind sie φ^2's, so ist H_1 ein Punkt. Im ersten Fall ist der Schnitt als kontinuierliche Folge von Punkten



eine Raumkurve, im andern Falle eine einfach unendliche kontinuierliche Folge von Ebenen, welche eine Regelfläche umhüllen; vgl. Aufgabe 11, S. S. VIII.

Von der Raumkurve liegen nicht mehr als vier Punkte auf einer Ebene, von der Regelfläche gehen nicht mehr als vier (Tangential-) Ebenen durch einen Punkt. Zwei F^2's schneiden sich also generaliter in einer Raumkurve vierten Grades, zwei φ^2 in einer Regelfläche vierten Grades.

Aufgabe 7. Der Schnitt eines G^2 und eines Gebildes ersten Grades H_1 ist ein Kegelschnitt.

1) Macht man H_1 zur neuen y-Ebene, so wird durch die Transformation der Grad von G^2 nicht geändert, und indem man $y = 0$ setzt, erhält man für das Schnittgebilde eine Gleichung zweiten Grades in x und z;

2) $H_1 . K_1$ ist ein Quadrik G', man kann die Unbestimmtheit der Konstanten in K_1 benutzen, so dafs $G - G' = T(y, z)$ wird, $T(y, z)$ stellt einen Cylinder dar, dessen Grundkurve in der x-Ebene ein Kegelschnitt, und dessen Kante der x-Achse parallel ist, der Schnitt desselben mit H_1 ist zugleich der Schnitt von H_1 mit G und kann von keiner Geraden aufser ihm in mehr als drei Punkten getroffen werden.

Aufgabe 8. Der Ort der Durchschnitte der entsprechenden Elemente zweier gleichartigen projektiven Ebenenbüschel oder Punktreihen ist ein Quadrik.

Vgl. S. S. VIII S. 58, Aufgabe 19.

Aufgabe 9. Bewegt sich eine starre Gerade, so dafs drei ihrer Punkte auf den drei Seiten einer körperlichen Ecke bleiben, so bewegt sich ein beliebiger vierter Punkt der Geraden auf einem Quadrik. Die gebundenen Punkte seien P_i, der mobile M, die starren Abstände d_i, die Richtungskoordinaten a, b, c; dann ist $x_i = x + d_i a$ etc. Die Gleichung der Ebene an die P_i gebunden ist, sei $P_i = u_i \xi + v_i \eta + w_i \zeta - 1 = 0$, dann haben wir $u_i d_i a + v_i d_i b + w_i d_i c + P_i = 0$, folglich a, b, c, lineare Funktionen von x, y, z; und da zwischen a, b, c, die bekannte Relation $\varphi(a, b, c) = 1$ besteht, so erhalten wir als Ortsgleichung von M eine Gleichung zweiten Grades.

Aufgabe 10. Wenn vier Punkte einer starren Geraden auf den Seitenflächen eines Tetraeders bleiben, so beschreibt ein fünfter Punkt einen Kegelschnitt.

Wir haben diesmal die vier Gleichungen ersten Grades $u_i d_i a + v_i d_i b + w_i d_i c + P_i = 0$, aus denen sich durch Elimination eine Gleichung ersten Grades in den P und damit in x, y, z, d. h. also eine Ebene ergiebt. Der Punkt M bleibt also in einer Ebene und da er nach Aufgabe 9 sich auch auf einem Quadrik bewegt, so beschreibt er nach Aufgabe 7 einen Kegelschnitt.

Aufgabe 11. Eine Gerade bewegt sich längs zweier Geraden l und g im Raume, und so, dafs sie einer Ebene ε beständig parallel bleibt, welche Fläche erzeugt sie?

Die Gerade g sei y-Achse; die Ebene ε sei y-Ebene, g hat dann die Linienkoordinaten 0, 1, 0; 0, 0, 0; l ist $\{$ a, A; die bewegliche m sei $\{$u, U; dann ist nach § 12 Teil 1 $V = 0$, weil m die Achse g schneidet, $v = 0$ weil m auf der y-Ebene senkrecht steht; $U = yw$; $W = -yu$; also, weil $V = 0$, $zu = xw$, und weil m die Gerade g schneidet

$$u(A - yc) + w(C + ya) = 0,$$

also:

$$\text{I)} \qquad z(C + ya) + x(A - yc) = 0.$$

Die Fläche ist also ein Quadrik. Die Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn die yz-Ebene parallel l und x-Achse die Gerade, welche die Schnitte von l und g mit z verbindet, dann wird $a = 0$, $A = 0$ und man erhält als Resultat:

$$\text{II)} \qquad xyc - zx_1 b = 0,$$

welche Gleichung ein hyperbolisches Paraboloid (s. dort) darstellt.

Aufgabe 12. Eine Gerade bewegt sich so, dafs sie drei Geraden im Raum, deren Richtungen Einer Ebene angehören, beständig schneidet.

Die Geraden seien g, h, k; g werde x-Achse, die Ebene durch $g \parallel \varepsilon$ sei y-Ebene, der gemeinsame Abstand von g und h die y-Achse und die Parallele durch den Fufspunkt zu h in der y-Ebene sei die z-Achse. Dann ist

g $\{1, 0, 0, 0, 0, 0$; h $\{0, 0, 1, d, 0, 0$; k $\{a, 0, c, A, B, C$. Die bewegliche m sei wieder $\{u, U$. Dann ist

1) $U = 0$; 2) $w + uh = 0$; 3) $Wc + uA + vB + wC = 0$

wieder zu Folge § 12 Teil 1. Dieselbe Methode wie in Aufgabe 11 giebt, da $-cy^2x + cy^2x = 0$, den Quadrik

$$By^2 + xy(A - ch) + Czy - Bdy - Cdz = 0,$$

der sich wieder als hyperbolisches Paraboloid erweisen wird.

Aufgabe 13. Die Fläche, erzeugt von einer beweglichen Geraden, welche beständig drei sich kreuzende feste Geraden schneidet.

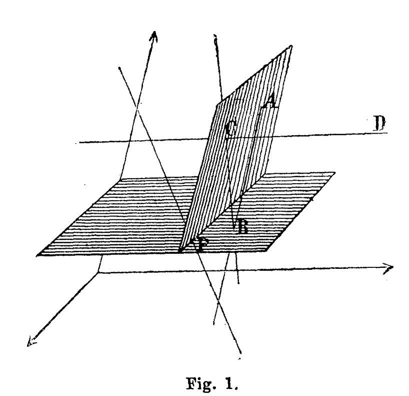


Fig. 1.

Wir wählen die Koordinaten wie in der vorigen Aufgabe, die y-Ebene enthält aber diesmal den Richtungspunkt von K nicht. Es ändert sich nur Gleichung 3 der Aufgabe 12, welche den Zuwachs bV erhält.

Man erhält

$$(A - yc + bz)xy - (h - y)[y(B + cx) + z(C - xb)]$$

und da sich die Glieder dritter Dimension aufheben, ist das Resultat der Quadrik:

$$y^2B + xy(A - dc) + yzC + dbx - dBy - dCz = 0$$

ein Einschaliges Hyperboloid (s. d), das in das vorige Paraboloid übergeht, wenn $b = 0$ ist.

Aufgabe 14. In Fig. 1 sind DC || zur x-Achse, AB || zur y-Achse; durch einen Punkt P in der z-Ebene

sind Parallelebenen zur x- und zur y-Ebene gelegt, welche die betreffenden Geraden in C und B schneiden. Wenn sich P in der z-Ebene auf einer Geraden g bewegt, welche Fläche erzeugt B C { m?

Es sei $g \{ ux + vy - 1 = 0$; $P \} c, b, 0$; $C \} c\ 0\ d$; $B \{ 0\ b\ a$; u, v, a und d sind Konstanten. $BC \left\{ \frac{x - c}{c} \right.$ $= \frac{y}{-b} = \frac{z - d}{d - a}$ also, $c = \frac{x(d - a)}{(z - d)}$; $b = \frac{y(a - d)}{z - d}$ und

$$ux(d - a)(z - d) + vy(a - d)(z - a) - (z - a)(z - d) = 0$$

die gesuchte Gleichung. Die Fläche ist also ein Quadrik (hyperbolisches Paraboloid).

Aufgabe 15. Gegeben sind drei konzentrische Kugeln um den Ursprung; A, B, C drei entsprechende Punkte auf demselben Centralstrahl; Ort des Punktes P, in dem sich die Parallelebenen zu den Koordinatenebenen je durch A, B, C schneiden?

$$A \} x_a,\ y_a,\ z_a;\ B \} x_b,\ y_b,\ z_b;\ C \} x_c,\ y_c,\ z_c;$$

$$P \} x_a,\ y_b,\ z_c;\ \} xyz;\ y_b = y_a \frac{b}{a};\ z_c = z_a \frac{c}{a};$$

$$\varphi(x_a,\ y_a,\ z_a) - a^2 \} \varphi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) - 1$$

also ein Quadrik (Ellipsoid s. d.).

Aufgabe 16. Ort des Punktes, dessen Abstände r_1 und r_2 von zwei festen Punkten F_1 und F_2 der Gleichung $|r_1 \pm r_2| = |c|$ genügen. Um die Ortsgleichung möglichst einfach zu erhalten, bestimmen wir dies Achsensystem rechtwinklig und symmetrisch und machen $F_1 F_2$ selbst zur x-Achse, $MF_2 = + a$, wo M die Mitte von $F_1 F_2$ ist.

Man erhält dann

$$4c^2(y^2 + z^2) + 4x^2(c^2 - 4a^2) = c^2(c^2 - 4a^2)$$

setzt man $c^2 - 4a^2 = 4b^2$ und $c = 2p$, so erhalten wir $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$, also einen Quadrik.

Man sieht, die Schnitte parallel zur x-Ebene sind Kreise, deren Centren auf der x-Achse liegen. Für einen Schnitt

durch die x-Achse haben wir nach Teil 1 § 18 Aufgabe 9: $\xi = x$, $y = \zeta \sin i$, $z = \zeta \cos i$, also sind alle Schnitte kongruent und gleich dem centralen Kegelschnitt $\frac{x^2}{p^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1$. Die Fläche, heifst das, ist erzeugt durch Umdrehung dieses Kegelschnitts um die x-Achse, sie ist eine Rotationsfläche. Dafs das Zeichen $\pm$ ohne Einflufs, haben wir schon bei der Kugelellipse Teil 1 S. 97 gesehen, doch ist zu bemerken, wenn das +-Zeichen gilt, so mufs $c \geqq 2a$ sein, wenn das — Zeichen gilt, mufs $c \leqq 2a$ sein und dann ist b^2 negativ und gleich $-\beta^2$; im ersteren Falle ist der erzeugende Kegelschnitt eine Ellipse, im anderen eine Hyperbel; die erzeugte Fläche im ersten Falle ein Rotations-Ellipsoïd, im zweiten Falle ein Rotations-Hyperboloid mit zwei Schalen (s. d.)

Aufgabe 17. Ort der Punkte, deren Abstände von einer festen Ebene ε und einem festen Punkt F ein konstantes Verhältnis haben.

Man sieht a priori, dafs das Resultat die durch Rotation eines Kegelschnitts erzeugte Fläche ist, es ist nur zu zeigen, dafs sie vom zweiten Grade ist.

Wählen wir das Lot von F auf die Ebene $F\varphi$, zur x-Achse, $F\varphi$ gleich 2p, und den Punkt zwischen F und φ, der zum Ort gehört, zum Ursprung, so erhalten wir

$$\left(x - 2p\frac{c}{c+1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(x + \frac{2p}{c+1}\right)^2 c^2.$$

Ist $c = 1$, so ist $y^2 + z^2 = 4px$, die Gleichung des Rotationsparaboloids; die rotierende Kurve heifst Meridiankurve.

Aufgabe 17a. Welche Fläche wird durch Rotation einer Parabel um ihre Scheiteltangente hervorgebracht?

Da die Fläche sowohl durch Rotation der Parabel $y^2 = 2p\zeta$ als $y^2 = -2p\zeta$ hervorgebracht wird, ist ihre Meridiankurve $y^4 = 4p^2\zeta^2$, und die Fläche selbst $y^4 = 4p^2(x^2 + z^2)$.

Aufgabe 18. Gegeben eine feste Ebene ε, eine feste Kugel M, und ein Punkt S. Man zieht durch S eine Gerade, welche ε in R, Kugel M in P schneidet, zieht PM und RM

und durch S zu PM die Parallele, welche RM in Q trifft, Ort von Q.

Fig. 2. $S\{s, 0, 0$; $M\{0, b, 0$; $\varepsilon\{x - p = 0$;

$$R\{p, q, t;\quad RM\left\{\frac{x}{p} = \frac{y-b}{q-b} = \frac{z}{t};\right.\quad Q\{x, y, z.$$

Ist $P\{s + \lambda p;\ 0 + \lambda q;\ 0 + \lambda t,\ 1 + \lambda$, so ist (vgl. Teil 1 S. 124) λ bestimmt durch

$$\alpha)\qquad \lambda^2(p^2 + (q-b)^2 + t^2 - r^2)$$
$$+ 2\lambda(sp - b(q-b) - r^2) + s^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

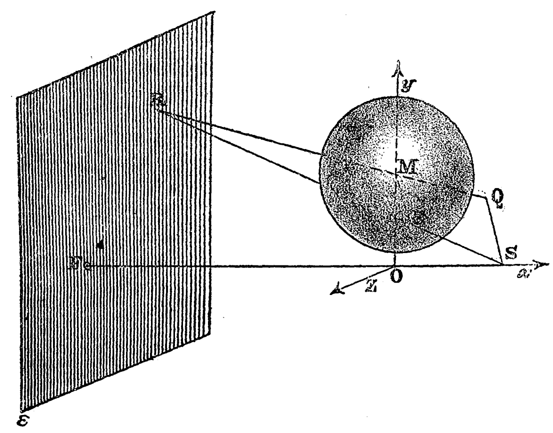


Fig. 2.

Aber infolge des Parallelismus von PM und SQ ist $-\lambda = \frac{x}{p} = \frac{y-b}{q-b} = \frac{z}{t}$, also erhalten wir aus α)

$$x^2(p^2 - r^2) + p^2(y^2 + z^2) - 2xp(sp - r^2) + p^2(s^2 - r^2)$$

oder wenn wir $x = \xi + \mu$ setzen, wo $\mu = \frac{p(sp - r^2)}{p^2 - r^2}$ ist:

$$\beta)\ \xi^2(p^2 - r^2) + (y^2 + z^2)p^2 - \frac{p^2 r^2 (s-p)^2}{(p^2 - r^2)} = 0.$$

Der Ort ist, je nachdem die Kugel M die Ebene ε schneidet, oder nicht schneidet ein Rotations-Hyperboloïd oder -Ellipsoïd, welches konstant

bleibt, wenn das Kugelcentrum sich auf MO bewegt; man vgl. S. S. VIII S. 229 den Satz über die Boscovich-Ellipse.

Aufgabe 19. Von einem Punkte A aufserhalb einer Kugel zieht man den Durchmesser ABC und durch A eine beliebige Sekante ADE. Man verbindet C mit einem der Schnittpunkte z. B. mit D und macht CDF gleich AE, so ist der Ort der Punkte F eine F^2.

Es ergiebt sich wie S. S. VIII S. 228 Aufgabe 7 das Rotations-Ellipsoïd $\frac{\xi^2}{(a+r)^2} + \frac{y^2+z^2}{(a-r)^2} = 1$.

Aufgabe 20. Ein Punkt bewegt sich so, dafs seine Entfernung von einem festen Punkt mittlere Proportionale zu seinen Abständen von zwei festen Ebenen ist.

Der Quadrik: $\varphi(x - a, \ldots) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - 1)(\alpha_2 x + \ldots)$

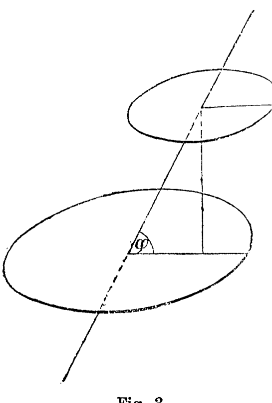


Fig. 3.

Aufgabe 21. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben; ein Punkt P bewegt sich so, dafs $PA^2 + PC^2 = PB^2$ ist.

$\varphi(x, A) + \varphi(x, C) = \varphi(x, B)$. Man wähle die vierte Ecke des aus ABC bestimmten Parallelograms, welche B gegenüberliegt, als O.

Aufgabe 22. Ein Kreis bewegt sich so, dafs seine Ebene ihre Stellung nicht ändert, der Mittelpunkt auf einer Geraden bleibt und die Differenz der Quadrate der Radien proportional ist der Differenz der Quadrate der Abstände der beweglichen Ebene von der Anfangslage.

Fig. 3. $(x - y \operatorname{ctg} \varphi)^2 + z^2 = \varrho^2 - y^2 c^2,$

wo y der Abstand, ϱ der Radius des Anfangskreises. Wenn ϱ gleich 0, so wird die Fläche zum Kegel, da wenn x, y, z eine Lösung auch λx, λy, λz eine Lösung. Was wird aus der Fläche, wenn $c = 0$?

Aufgabe 23. Ein Kreis bewegt sich wie in Aufgabe 22, der Radius ist dem Weg des Centrums proportional.

Aufgabe 24. Durch die Endpunkte des Durchmessers eines Kreises sind Ebenen parallel zu zwei festen Ebenen gelegt, Ort der Durchschnittsgeraden?

Ist $P \} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ die eine, $P' \} \alpha' x$ etc. die andere Ebene, ist r der Radius des Kreises, φ der Winkel des Durchmessers mit einer Anfangslage, das Koordinatensystem rechtwinklig, so ist

$$\alpha r \cos\varphi + \beta r \sin\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z = P;$$
$$\alpha' r \cos\varphi + \beta' r \sin\varphi = - P'$$

also ist der gesuchte Ort der Quadrik:

$$r^2 (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = (P\beta' + P'\beta)^2 + (P\alpha' + P'\alpha)^2.$$

Aufgabe 25. Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Geraden ein festes Verhältnis haben.

Wir haben für den Abstand des Punktes von der Geraden vgl. Aufgabe 12 § 12 Teil 1

$$\varphi(u, v, w) = d^2 = F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

wo F eine homogene Funktion zweiten Grades, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ linear in den Koordinaten des Punktes, also ist der Ort ein Quadrik

$$F(\mathfrak{A}) = K F(\mathfrak{A}_1).$$

Ist das Koordinatensystem passend gewählt, d. h. rechtwinklig und möglichst symmetrisch und sind die Geraden auf einander senkrecht, so erhält man, wenn $K = 1$ ist.

$$x^2 - z^2 + 2 d y = 0$$

ein Hyperbolisches Paraboloïd (s. dort).

Aufgabe 26. Eine Ebene bewegt sich so, daſs sie zwei feste Richtungen unter Winkeln schneidet, die sich zu einem Rechten ergänzen.

Nach § 13 Teil 1 haben wir, wenn die bewegliche Ebene $\{u, v, w$, und die Richtungen $\{a$ bezw. a'

$$(u a + v b + w c)^2 + (u a' + v b' + w c')^2 = F(u, v, w)$$

also eine φ^2 (eine uneigentliche, s. d.).

Aufgabe 27. Ein Punkt bewegt sich so, daſs er von einer festen Geraden und einer festen Ebene Abstände hat, die ein konstantes Verhältnis haben.

Die Ebene $\varepsilon \{ \alpha x + \beta y + \gamma z - n = 0$, die Gerade a, A. Die Ortsgleichung $F(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) = K(\alpha x - + \beta y + \gamma z - n)^2$.

Schneidet g die Ebene in O, wird die Projektion von g zur y-Achse gewählt, die Ebene zur x-Ebene und das System rechtwinklig, so ist $a = \sin i$, $b = \cos i$, $c = 0$, $A = B = C = 0$, und somit, wenn $K = 1$:

$$z^2 - \sin^2 i\,(x^2 - y^2 + 2\,x\,y \cos i) = 0.$$

Dreht man das Koordinatensystem in der z-Ebene um $90 - \frac{i}{2}$, so erhält man $z^2 + 2 \sin i\, \xi \eta = 0$ als Gleichung eines hyperbolischen Paraboloïds.

Aufgabe 27a. Wie 27, und g parallel ε.

Aufgabe 28. Ort der Punkte, deren Abstände von einer festen Geraden g und einen festen Punkt P proportional sind

$$F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = K\,\varphi\,(x - x_p).$$

Ist $K = 1$, das Koordinatensystem rechtwinklig, g die y-Achse, das von P gefällte Lot die x-Achse, so ist $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $A = B = C = 0$, $x_p = d$, $y_p = 0$, $z_p = 0$ und man erhält, da $\mathfrak{A} = A' - A$ etc.

$$z^2 + x^2 = K\,((x - d)^2 + y^2 + z^2).$$

Ist $K = 1$, so ergiebt sich, wie a priori klar, der parabolische gerade Cylinder

$$y^2 = 2\,d\,x - d^2.$$

Aufgabe 29. Eine Ebene bewegt sich so, daſs die Summen der Quadrate ihrer Abstände von festen Punkten, respektive mit beliebigen Konstanten m_1 bis m_n multipliziert, unverändert bleibt.

$$\Sigma m_k\,(u\,x_k + v\,y_k + w\,z_k)^2 = c\,F\,(u, v, w).$$

Aufgabe 30. Ein Punkt bewegt sich so, daſs die Summe der Quadrate seiner Abstände von n festen Ebenen, respektive mit beliebigen Konstanten multipliziert, unverändert bleibt.

---

§ 2. Polare und Determinante der Form G.

Es sei die Gleichung des Gebildes G gegeben in der Form

$$G = \Sigma\, a_{ik}\, s_i\, s_k = a_{11}\, s_1^2 + 2\,a_{12}\, s_1\, s_2 + 2\,a_{13}\, s_1\, s_3 + 2\,a_{14}\, s_1\, s_4 + \ldots = 0,$$

d. h. also $a_{ik} = a_{ki}$; ein Wertsystem der s für welches die Form G den Inhalt 0 annimmt, heiſse wieder ein Element des Gebildes, jedes Wertsystem der s heiſse ein Element des Gebiets G, es werde kurz mit s bezeichnet, und soll es hervorgehoben werden, so setzen wir G (s) statt G.

Wir haben schon wiederholt gezeigt, daſs für jede quadratische, homogene Form beliebig vieler Variabeln der Satz gilt.

2a) $G(s + s') = G(s) + 2\,\Sigma s_i'\, G_i'(s_i) + G(s')$

wo

3) $G_i'(s) = \sigma_i = a_{i1}\, s_1 + a_{i2}\, s_2 + a_{i3}\, s_3 + a_{i4}\, s_4$

$2\,G_i'(s)$ bezw. $2\sigma_i$ heiſst die Ableitung von G (s) nach s_i. Da $G'(s_i)$ eine homogene Form ersten Grades, so ist

$$G_i'(s' + s'' + s''' + \ldots) = G_i(s') + G_i(s'') + G_i(s''') + \ldots$$

und daraus wieder

$$G(s' + s'' + s''' + \ldots) = G(s') + G(s'') + G(s''') + \ldots$$
$$+ 2\,\Sigma s_i'\, \sigma_i'' + 2\,\Sigma s_i'\, \sigma_i''' + \ldots .$$
$$2\,\Sigma s_i''\, \sigma_i''' + 2\,\Sigma s_i''\, s_i^{IV} + \ldots\ 2\,\Sigma s_i'''\, \sigma_i^{IV} + \ldots$$

eine Formel von der wir z. B. § 12 Aufgabe 12 S. S. VIII Gebrauch gemacht haben. Die Form $\Sigma s_i'\, G_i'(s) = \Sigma s_i'\, \sigma_i$, sowie jede ihr äquivalente heiſst die P o l a r f o r m d e s P o l - (e l e m e n t) s s' f ü r d i e F o r m G. S i e h t m a n d a r i n s' a l s g e g e b e n, s a l s v a r i a b e l a n, s o i s t $\Sigma s_i'\, G_i'(s) = 0$ e i n G e b i l d e e r s t e r O r d n u n g u n d h e i ſ s t d i e P o l a r e des Pols s' für das Grundgebilde G = 0.

Da $G(s + s') = G(s' + s)$ ist, so ist

4) $\Sigma s_i'\, \sigma_i = \Sigma s_i\, \sigma_i' = P(s\, s')$

d. h. $\Sigma s_i'\, \sigma_i$ ändert sich nicht, wenn man s' und s vertauscht, d. h. wir haben den Hauptsatz

Gehört das Element s zur Polare des Pols s', so gehört das Element s' zur Polare des Pols s.

A u f g a b e 1. Die Polare des Nullpunkts, wenn die s Punkte bedeuten. Die Ebene

$$\sigma_4 = a_{41}\, s_1 + a_{42}\, s_2 + a_{43}\, s_3 + a_{44}\, s_4 = \Sigma\, a_{4i}\, s_i = 0.$$

A u f g a b e 2. Die Polare der unendlich fernen Ebene, wenn die s Ebenen bedeuten.

Der Punkt $a_{41} : a_{44};\ a_{42} : a_{44};\ a_{43} : a_{44}$.

Aufgabe 3. Liegen Pol und Polare in einander, so gehört der Pol zum Gebilde G und umgekehrt.

Es ist

$$5) \qquad \Sigma s'_i \sigma'_i = G(s').$$

Bestimmen die Variabeln Punkte, so ist die Polare eine Ebene, ist das Polelement s' eine Ebene, so ist die Polare ein Punkt, in beiden Fällen sind die Koordinaten σ_i', also

Pol und Polare sind stets von entgegengesetzter (reziproker) Beschaffenheit.

An diesem Dualismus ist das Prinzip der Dualität von Poncelet gefunden und man kann diese Beziehung benutzen um jedem Punkt eine Ebene, bezw. jeder Ebene einen Punkt zuzuordnen, durch das System der vier homogenen linearen Gleichungen.

$$6) \qquad \begin{aligned} a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + a_{13} s_3 + a_{14} s_4 &= \sigma_1 \\ a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + a_{23} s_3 + a_{24} s_4 &= \sigma_2 \\ a_{31} s_1 + a_{32} s_2 + a_{33} s_3 + a_{34} s_4 &= \sigma_3 \\ a_{41} s_1 + a_{42} s_2 + a_{43} s_3 + a_{44} s_4 &= \sigma_4 \end{aligned}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

Dies System gestattet im allgemeinen die s umgekehrt durch die σ auszudrücken und man erhält.

$$7) \qquad s_i A = \sum_k \alpha_{ik} \sigma_k,$$

wo A die Determinante $| a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} |$ und α_{ik} der Koeffizient von a_{ik} in A ist, die erste Unterdeterminante vgl. Pund (S. S. VI). Nur wenn $A = 0$ ist, ist die Umkehrung der Beziehung zwischen den s und σ nicht gestattet, dies kann nur eintreten, wenn die 4 σ nicht von einander unabhängig sind, sondern durch drei von ihnen die vierte Gröſse bestimmt ist, die Gleichungen 6) also unvereinbar sind, sobald dem vierten σ ein von diesem bestimmten abweichender Wert vorgeschrieben ist. Aus der Gleichung 7) sehen wir, daſs wenn $A = 0$ und drei von den σ gleich 0 sind, die 4. Zahl σ von selbst 0 werden muſs, d. h. $\mathbf{A = 0}$ ist eine Gleichung zwischen den Koeffizienten a_{ik}, welche aussagt, daſs wenn drei der $G_i'(s)$ verschwinden, auch die vierte verschwindet. Wenn $A = 0$ ist, so heiſst die Form G und das Gebilde G uneigentlich.

Ist die Grundform G eigentlich, so gehört zu jeder Form $\varphi(s)$ eine Wechselform $F(\sigma)$ und umgekehrt, und ebenso zu jedem Gebilde $\varphi(s) = 0$ ein Wechselgebilde $F(s) = 0$, dadurch, dafs die Variabeln s und σ vertauscht werden.

Ein Beispiel boten die Funktionen φ und F der früheren Abschnitte. Die Wechselgebilde φ und F sind im allgemeinen verschieden, aber von gleicher Ordnung, nur in verschiedenen Raumelementen; sind sie identisch, so liegen Pol und Polare in einander, also:

Das Gebilde G ist sein eignes Wechselgebilde Γ.

Ist σ die Polare zum Pol s in Bezug auf G, so ist s die Polare zum Pol σ in Bezug auf Γ.

Aufgabe 4. Zu G die Wechselform zu bilden.

Da $G = \Sigma s_1 \sigma_i$, so ergiebt sich nach Unterdrückung des konstanten Faktors A^{-1}:

$$\Gamma = \Sigma \sigma_i \sum_k \alpha_{ik} \sigma_k = \Sigma \alpha_{ik} \sigma_i \sigma_k.$$

Aufgabe 5. Die Wechselform einer Wechselform ist die Urform.

Die Wechselform entsteht durch Vertauschung der Pole mit ihren Polaren in Bezug auf G; die Polare der Polaren ist aber wieder der Pol.

Aufgabe 6. Den letzten Satz durch Rechnung ohne Determinantentheorie zu beweisen.

Zunächst beweisen wir, dafs der gemeinsame Nenner A eine Konstante, weil die σ für keinen endlichen Wert der s unendlich werden können, und für jeden unendlich grofsen Wert eines s die σ entweder unendlich oder unbestimmt werden. Durch Rücksubstitution der σ in s ergiebt sich dann die Definition der α_{ik}, denn weil s_i identisch gleich s_i sein mufs, so erhalten wir

$$8) \qquad A = \sum_p \alpha_{ip} a_{ip}\,; \quad 0 = \sum_p \alpha_{ip} a_{kp},$$

wo p der Reihe nach die Zahlen 1 bis 4 durchläuft. Aus der ersten Gleichung 8) folgt sofort, dafs, wenn ein σ z. B. σ_4 identisch 0 ist (dadurch dafs z. B. a_{41} bis a_{44} verschwinden) dann A ebenfalls identisch 0 ist.

Haben wir nun die Wechselform von G gebildet, so ist sie nach Abwerfung von $\frac{1}{A}$ gleich $\Sigma \alpha_{ik} \sigma_i \sigma_k$ und daraus

$$\sigma_i' = \alpha_{i1}\,\sigma_1 + \alpha_{i2}\,\sigma_2 + \alpha_{i3}\,\sigma_3 + \alpha_{i4}\,\sigma_4$$

und wenn wir für σ_1 ihre Werte in s sehen, bezw. die Gleichung 7) benutzen, $\sigma_i = s_i'\,A$, also $\sigma' \{ s$.

Aufgabe 7. Die Formeln 8 dadurch zu beweisen, dafs man den σ die besonderen Werte 0 0 0 1 etc. giebt.

Aufgabe 8. Zu beweisen: Die Wechselform Γ einer uneigentlichen Form G ist eine uneigentliche Form.

Bestimmt man die σ aus dem System 7) und nennt dieselbe Verbindung der α, welche wir α_{ik} nannten, β_{ik}, und die Determinante $|\,\alpha_{11} \ldots \alpha_{44}\,|$ dann B, so ist

$$\sigma_i\,B = A\,\Sigma\,s_k\,\beta_{ik}\,,$$

also $\beta_{ik} = \lambda\,a_{ik}$ und daraus $B = \Sigma\,\alpha_{ik}\,\beta_{ik} = \lambda\,A$. Ist also $A = 0$, so ist $B = 0$ und der Satz bewiesen.

Aufgabe 9. Die Wechselform einer eigentlichen Form G ist wieder eine eigentliche Form Γ.

Da G die Wechselform von Γ ist, so müfste, falls Γ uneigentlich ist, auch G uneigentlich sein.

Hieraus folgt, dafs λ nur 0 werden kann, wenn $A = 0$ ist, und damit, dafs λ eine Potenz von A, und wie die Abzählung ergiebt, die zweite Potenz. Wir haben

$$9) \qquad B = A^3;\ \beta_{ik} = A^2\,a_{ik}$$

wie aus der Determinantentheorie (Pund, S. S. VI) bekannt ist. Wir haben den Satz:

Die eigentlichen Flächen zweiter Klasse sind zugleich eigentliche Flächen zweiter Ordnung und umgekehrt.

Aufgabe 10. Eine Fläche, deren Gleichung eine der Variabeln nicht enthält, ist stets uneigentlich.

Folgt aus der ersten Gleichung 8).

Aufgabe 11. Die Determinante A verschwindet, wenn zwei der σ identisch sind, d. h. also

$$a_{ip} = a_{kp},\ \text{wo p von 1 bis 4 geht.}$$

Folgt aus der zweiten Gleichung 8).

Aufgabe 11a. Untersuche die Form $x^2 + 4\,x\,y + 4\,x\,z + 4\,y^2 + 8\,y\,z + 4\,z^2 + 2\,x - 4\,y - 4\,z - r^2$.

Cylinder $x^2 + 4\,x\,t + 4\,t^2 + 2\,x - 4\,t - r^2 = 0$.

Aufgabe 12. Untersuche die Form:

$$(x-3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2+2(x-3)(y-5)$$
$$-6(x-3)(z-7)+2(y-5)(z-7).$$

Man verschiebt das Koordinatensystem parallel nach dem Punkt $S\{3, 5, 7$, und wendet dann, nach dem man die vierte Variabel eingeführt, Aufgabe 10 an.

Aufgabe 13. Untersuche die Fläche, welche entsteht, wenn man alle Punkte eines festen Kegelschnitts mit einem festen Punkt verbindet.

Aufgabe 14. Untersuche die Form $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 1$ und bilde die Wechselform

$$\sigma_1 = \lambda_1 s_1,\ \sigma_2 = \lambda_2 s_2,\ \sigma_3 = \lambda_3 \sigma_3,\ \sigma_4 = -\lambda_4.$$

$A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, also das Gebilde G eigentlich, und die Wechselform

$$\Gamma = \sigma_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \sigma_2^2 \lambda_1 \lambda_3 + \sigma_3^2 \lambda_1 \lambda_2 - \sigma_4^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$
$$\Gamma \{ \sigma_1^2 \lambda_1^{-1} + \sigma_2^2 \lambda_2^{-1} + \sigma_3^2 \lambda_3^{-1} - \sigma_4^2.$$

Aufgabe 15. Bilde die Gröfse A bei beliebiger Form.

Nach Formel 8) handelt es sich nur um die Berechnung von α_{ik}. Wenn man nun drei der Gröfsen s durch die σ und die 4. ausdrückt, z. B. s_1, so findet man z. B. dafs α_{11} nichts anderes ist, als die Gröfse, die wir in S. S. VIII A nannten, d. h. die Determinante die man erhält, wenn man die beiden Reihen, welche sich in α_{11} schneiden, wegläfst. Um nun α_{ik} zu berechnen, bringt man durch $i-1$ Tausche von Horizontalreihen und $k-1$ Tausche von Vertikalreihen a_{ik} an Stelle von a_{11}, und sieht, dafs $\alpha_{ik} = (-1)^{k+i} . A_{ik}$ ist, wo A_{ik} die Determinante ist, die man erhält, wenn man die beiden Reihen wegläfst, welche sich in a_{ik} schneiden. Die Berechnung von α_{ik} wird dann durch analoge Betrachtung auf das Eliminationsresultat von zwei homogenen Gleichungen zurückgeführt, so ist z. B.

$$\alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5 (a_{11}(a_{44} a_{32} - a_{34} a_{42}) + a_{12}(a_{34} a_{41} - a_{31} a_{44})$$
$$+ a_{14}(a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41})).$$

Aufgabe 16. Setzt man in die Form G (s) für s_1 ein $c_{11}\, t_1 + \ldots c_{41}\, t_4$ etc., so wird die Determinante A′ von G(t) gleich $A\,.\,C^2$, wo C die Substitutionsdeterminante dieselbe Funktion der C_{ik} wie A von den a_{ik}.

Man wendet den Satz S. S. VIII § 27 an. Ist $a_{ik} = u_{ik} + v_{ik}$, so ist $A = U + V$ wo U erhalten wird, wenn man in dem System der erzeugenden Gleichung die v gleich 0 setzt, und V, wenn man die U gleich 0 setzt, der Satz ist eine unmittelbare Folge von Formel 8. Also:

Eine uneigentliche Form bleibt bei jeder Koordinatentransformation uneigentlich, eine eigentliche eigentlich.

Aufgabe 17. Die Form:

$$s_1^2 + 4\, s_1\, s_2 + 6\, s_1\, s_3 + 8\, s_1\, s_4 + 5\, s_2^2 + 12\, s_2\, s_3 + 14\, s_2\, s_4 + 16\, s_3\, s_4 + 12_9^2\, s_4^2.$$

Das Koordinatensystem sei $\lambda = \mu = \nu = 60$, die S seien Punktkoordinaten; man transformiere dadurch, dafs die y-Achse in der Halbierungsebene von (x, z) gedreht wird, bis sie senkrecht steht.

---

§ 3. Das Tangential-Element, Einteilung der Flächen.

Es seien s′ und s″ zwei Elemente des Gebiets G, dann nennt man den Inbegriff aller Werte, welche die Form $s' + \lambda s''$ annimmt, die Gerade s′ s″. Der Parameter λ läuft von $-\infty$ bis $+\infty$ und man setzt fest, dafs zu $\lambda = \pm\infty$, der Wert $s = s''$ gehöre. Setzen wir in G (s) also für s_i ein $s_i' + \lambda\, s_i''$, so giebt 2 a)

9) $G(s) = G(s') + 2\lambda P(s' s'') + \lambda^2 G(s'') = 0.$

Dies ist für λ eine quadratische Gleichung, also:

Ein Gebilde zweiten Grades hat mit einer Geraden aufser ihm nicht mehr als zwei Elemente gemeinsam.

Eine F^2 wird von einer geraden Linie, die nicht ganz auf der Fläche liegt, in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten.

Hieraus folgt direkt:

Eine F^2 wird von einer Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten.

Eine φ^2 wird von einem Punkt in einem (Tangenten-) Kegel zweiten Grades geschnitten.

Gehört das Element s′ zum Gebilde G, d. h. ist $G(s') = 0$, so ist eine Wurzel von 9), welche (vgl. S. S. VIII S. 121) das Fundament der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung und Klasse ist, gleich Null, ist aber gleichzeitig $P(s', s'') = 0$, d. h. liegt s″ auf der Polaren von s′, also auch s′ auf der Polaren von s″, so wird auch die zweite Wurzel λ gleich 0, d. h. der zweite Schnittpunkt der Geraden S′ S″ (kurz g), fällt mit S′ zusammen. Diese Gerade heiſst dann Tangente des Gebildes G in S′ { s′. Also:

Die Polare eines Elements s′ des Gebildes G ist der Ort aller Tangenten an G in S′.

Als solcher heiſst sie: Tangentiale.

Die Tangentiale läſst noch eine zweite Auffassung zu. Wenn λ unter jedem Maſs klein, so verschwindet λ^2 gegen λ, und wenn s″ endlich, ist auch $\lambda s''$ unter jedem Maſs klein, und $\lambda^2 G(s'')$ verschwindet gegen λ. Ist nun s′ ein Element des Gebildes G und $s' + \lambda s''$ ein benachbartes, also λ unter jedem Maſs klein, und $G(s' + \lambda s'') = 0$, so giebt 9) $P(s', \lambda s'') = 0$, und wenn man $\lambda s''$ beliebig variabel setzt, also $\lambda s'' = s_i$, so ist $P(s' s) = 0$, die Gleichung der Polaren, der also alle dem Punkte s′ benachbarte Elemente genügen.

Wir können auch aus der Gleichung $G(s) = \Sigma s_i \sigma_i$ direkt zu diesem Resultate kommen; da hieraus unmittelbar folgt, daſs σ_i' die Koordinaten des Gebildes sind, dem die benachbarten Elemente von s′ genügen.

Wir haben die Sätze:

Alle Tangenten in einem Punkt S′ { s′ einer (eigentlichen) Fläche F^2 liegen auf einer Ebene, der Tangentialebene von F^2 in S′, welche zugleich die Polare (Ebene) des Punktes S′ ist.

Alle Tangenten in einer Ebene S′ einer (eigentlichen) Fläche φ^2 gehen durch einen Punkt, den Berührungspunkt, welcher zugleich Polare (Punkt) von S′ ist.

Es kann aber vorkommen, dafs ein Element S' keine bestimmte Polare besitzt; dies tritt ein, wenn $P(s' s)$ identisch verschwindet, d. h. alle $G'(s_i')$ gleich Null sind. Da dann nach 3) nach $G(s') = 0$ ist, so gehört ein solches Element immer zum Gebilde G, und ist durch vier homogene lineare Gleichungen bestimmt. Da das Element s' ein bestimmtes, und daher das Wertsystem 0, 0, 0, 0, für s ausgeschlossen ist, so zieht das Verschwinden aller σ die Bedingung $A = 0$ nach sich da $s_i A = \Sigma \alpha_{ip} \sigma_p$ ist. Es mufs also diese Gleichung $A = 0$ von den Koeffizienten a_{ik} erfüllt sein, und es giebt, da dann im allgemeinem die Quotienten der s bestimmte Werte sind, wie allgemein nur ein solches Element s, das wir Doppelelement nennen. Es ist also dadurch gekennzeichnet, dafs es keine bestimmte Tangentiale besitzt.

Wenn S' auf $G = 0$ liegt, und S'' auf der Polaren $P(s' s'') = 0$ von S' und zugleich auf dem Gebilde G, so verschwindet die Gleichung 9 identisch, d. h. jeder Punkt von $s' + \lambda s''$ liegt auf G. Da für ein Doppelelement $P(s' s'')$ für jeden Wert des s'' verschwindet, so liegt jede Gerade, die das Doppelelement s' mit einem Punkt s'' des Gebildes verbindet, ganz in dem Gebilde, und jede Gerade die S' mit einem Element des Gebietes aufserhalb G verbindet, hat mit G nur S' gemeinsam. Also:

Eine F^2 mit Einem Doppelpunkt ist eine Regelfläche, deren sämtliche Gerade durch den Doppelpunkt hindurch gehen.

Aufgabe 1. Zu beweisen: Geht eine Gerade einer solchen F^2 nicht durch den Doppelpunkt, so zerfällt die F^2 in zwei Ebenen, bezw. eine Doppelebene.

Jede Gerade, die einen Punkt der fremden Geraden mit dem Doppelpunkt verbindet, liegt ganz in der F^2, also die ganze Ebene etc.

Aufgabe 2. Mit und ohne Rechnung zu zeigen, dafs im Falle der Aufgabe 1 jeder Punkt der Schnittgeraden ein Doppelpunkt ist.

$$G(s) \{ 2 E_1(s) E_2(s); \; \sigma_i = E_2(s) . a_{1i} + E_1(s) a_{2i}$$

wenn $E_1(s) = a_1 s_1 + \ldots a_4 s_4$ ist. Oder: Für jeden Punkt S' der Schnittgeraden ist $P(s' s) = 0$ für jedes s beider

Ebenen, und diese Gleichung stellte also zwei Ebenen dar, wenn sie nicht identisch verschwände.

Aufgabe 3. Ist die F^2 eine Doppelebene, bezw. die φ^2 ein Doppelpunkt, so ist jedes Element ein Doppelelement.

$$G(s) \{ E_1(s)^2; \ \sigma_i = E_1(s) a_i.$$

Aufgabe 4. Besitzt ein Gebilde G zwei verschiedene Doppelpunkte, so besitzt es entweder eine Doppelgerade, oder jedes Element ist ein Doppelelement.

Eine F^2 mit Einem Doppelpunkt heifst Kegel zweiten Grades, der Doppelpunkt heifst Spitze des Kegels.

Eine φ^2 mit Einer Doppelebene ist eine Kegelfläche, deren sämtliche Geraden auf der Doppelebene liegen; die sämtlichen Berührungspunkte liegen also auch auf der Doppelebene und bestimmen einen Kegelschnitt. Der Kegelschnitt entspricht also dual dem Kegel.

Aufgabe 5. Alle Tangentialebenen des Kegels gehen durch die Spitze; desgl. alle Polarebenen.

Aufgabe 6. Jede Ebene durch die Spitze eines Kegels schneidet den Kegel in einem reellen oder imaginären Kegelschnitt mit einem Doppelpunkt, d. h. in zwei Geraden.

Ein Kegel, dessen Spitze im Unendlichen liegt, heifst Cylinder. Die uneigentlichen F^2 sind: Kegel, Cylinder, System Zweier Ebenen, Doppelebene.

Die uneigentlichen φ^2 sind: Doppelebene (Kegelschnitt); unendlich ferne Ebene; System von zwei Punkten; Doppelpunkt.

Da die eigentlichen F^2 zugleich eigentliche φ^2 und v. v, so braucht man nur die eigentlichen F^2 einzuteilen. Analog der ebenen Geometrie ist das Einteilungsprinzip das Verhalten der Flächen zu der unendlich fernen Ebene. Die F^2 können die Ebene $s_4 = 0$ schneiden oder berühren, im ersteren Falle heifsen sie centrale F^2, im zweiten Fall Paraboloïde. Der Schnitt kann reell oder imaginär sein; dies giebt die Einteilung der centralen F^2 in Hyperboloïde und Ellipsoïde; die Berührung kann in zwei reellen oder imaginären Geraden stattfinden, hyperbolisches Paraboloïd oder elliptisches.

Die Schnittkurve der Hyperboloïde kann Ellipsen- oder Hyperbelcharakter tragen, elliptisches oder zweimanteliges (zweischaliges) Hyperboloïd; hyperbo-

lisches oder einmanteliges (einschaliges) Hyperboloïd. Genaueres späteren Betrachtungen vorbehaltend, ist die Hauptentscheidung sofort zu treffen. Damit die unendlich ferne Ebene $s_4 = 0$ Tangente an die F^2 sei, ist nötig, dafs der Gleichung der F^2 in Ebenenkoordinaten $\Gamma = \Sigma \alpha_{ik} \sigma_i \sigma_k$ die Ebene mit den Koordinaten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ alle gleich 0 genüge, dazu mufs $\alpha_{44} = 0$ sein.

1) $A \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$: Centrale F^2 (Ellipsoïde und Hyperboloïde).

2) $A \neq 0$, $\alpha_{44} = 0$: Paraboloïde.

Aufgabe 7. Zeige, dafs das Kriterium $\alpha_{44} =$ bezw. $\neq 0$ vom Koordinatensystem unabhängig (vgl. S. S. VIII).

Aufgabe 8. Bestimme die Gattung der Flächen und die etwaigen Doppelpunkte von

$$x^2 - 2y^2 + 3z = 0; \quad x^2 - y^2 + 2z^2 = 1;$$
$$6x^2 + 3y^2 + z^2 . 2 = 6; \quad x^2 + y^2 - 2z = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 12x - 18y - 36z + 99 = 0;$$
$$3x^2 + 2yx + 4xz - 5y^2 - 12yz - 7z^2 + 3x + 5y + 7z = 0;$$
$$x^2 - 6xy + 10xz + 9y^2 - 30yz + 25z^2 - 14x + 42y - 70z + 49 = 0;$$
$$x^2 + 2y^2 + 2{,}25z^2 - 2xy + 3yz + 7{,}2 = 0.$$

Aufgabe 9. Mache die Gleichungen in Aufgabe 8 homogen und sieh die Koordinaten als Ebenenkoordinaten an und bestimme die Gattung dieser Flächen.

Aufgabe 10. Wenn die vierte Koordinate durch die drei anderen homogen und linear bestimmt ist, hat die Fläche ein Doppelelement.

Um das Verhalten der Fläche F^2 im Unendlichen genauer zu untersuchen, bemerkt man, dafs, wenn $s_4 = 0$, $G(s)$ sich reduziert auf $K(s) = \Sigma a_{ik} s_i s_k$, wo i und k von 1 bis 3 laufen, da s_1, s_2, s_3 den Koordinaten x, y, z proportional sind, so kann man $K(s) = 0$ als die Gleichung des Kegels $\Sigma a_{ik} s_i s_k$ ansehen und diesen Kegel, der den Asymptoten der Kegelschnitte entspricht (vgl. S. S. VIII § 31), den Asymptotenkegel der Fläche F^2 nennen. Die unendlich ferne Kurve ist dann der Schnitt des Asymptotenkegels mit der Ebene $s_4 = 0$. Unser $K(s)$ ist dann mit dem $G(s)$ der

S. S. VIII identisch, wir können es als Gleichung eines Kegelschnitts auffassen, er zerfällt, wenn $\alpha_{44} = 0$ und die Zerfällung ist in S. S. VIII § 28 S. 123 durchgeführt. Man überzeugt sich später, dafs die Bedingungen der Realität oder Nichtrealität der Faktoren sich umformen lassen in $A > 0$ für das hyperbolische, $A < 0$ für das elliptische Paraboloïd.

---

§ 4. Pol und Polare.

Wenn s′ und s zwei beliebige Elemente, so nannten wir die Gesamtheit $s' + \lambda s$ die Verbindungsgerade. Die Gröfse λ ist, wenn wir s_4' und s_4 gleich 1 setzen und die s Punkte bedeuten, das Teilungsverhältnis der Strecke S′S. Wenn die S Ebenen darstellen, ist λ, von einem konstanten Faktor abgesehen, das Teilungsverhältnis des Winkels. Zwei Elemente auf S′S, die zu λ und λ' gehören, sind harmonisch, wenn $\lambda + \lambda' = 0$ ist.

Für die Schnittelemente von S′S mit deren Gebilde G galt die Gleichung 9), sie ergiebt für λ:

$$10)\quad \lambda = -\frac{1}{G(s)}\left(P(s,s') \pm \sqrt{P^2(s s') - G(s)\, G(s')}\right).$$

Die Gröfse unter der Wurzel ist selbst eine quadratische Form K in Bezug auf s; die Gleichung $K = 0$, das Gebilde K, liefert die Gesamtheit aller von S′ an G gezogenen Tangenten. Das Element s′ gehört selbst zu K, da $P(s's') = G(s')$ ist, und ist ein Doppelelement, da $K'(s_i) = P(s s')\, G'(s_i') - G'(s_i)\, G(s')$ für $s = s'$ identisch verschwindet. Für die Berührungselemente selbst ist $G = 0$, also ist für sie, da $K = 0$ und $G = 0$ ist, auch $P(s s' = 0)$. Wir haben die Sätze:

Die Tangenten von einem Punkt an eine F^2 bilden einen Kegel zweiten Grades, den Tangentenkegel, der die F^2 längs eines Kegelschnitts berührt.

Die Tangenten in einer Ebene an eine φ^2 bilden diese Ebene, welche die φ^2 in einem Kegelschnitt berührt.

Die Berührungspunkte des Tangentenkegels liegen auf der Polaren der Spitze.

Die Berührungsebenen eines Kegelschnitts der φ^2 schneiden sich im Pol(aren Punkt) der Ebene des Schnittes.

Die Gleichung 10) zeigt, daſs, wenn s auf der Polaren von s' (also auch s' auf der Polaren von s), die beiden Werte der λ entgegengesetzt sind. Also:

Pol und Polare werden durch die Fläche G harmonisch getrennt.

Die Polare heiſst daher auch harmonische Polare.

Ist s irgend ein Element auf S' S'', σ seine Polare, so ist

$$s = s' + \lambda s''; \; \sigma_i = G_i'(s) = G_i'(s') + \lambda G_i'(s'') = \sigma_i' + \lambda \sigma_i'',$$

d. h.:

Bewegt sich ein Pol auf einer Geraden, so bewegt sich seine Polare ebenfalls auf einer Geraden. Diese Geraden heiſsen reziproke Polaren.

Aufgabe 1. Vier harmonischen Polen entsprechen wieder vier harmonische Polaren, die Trägergeraden beider Systeme sind reziproke Polaren.

Zur Vereinfachung können wir jetzt festsetzen, daſs die Variabeln s Punkte und die Variabeln σ Ebenen bestimmen. Die Formen G(s) und $\Gamma(\sigma)$ stellen ein und dieselbe Fläche dar, abwechselnd aufgefaſst als Inbegriff ihrer Punkte oder berührenden Ebenen und wenn G eigentlich ist, so ist es auch Γ und v. v. Jeder eigentlichen Fläche zweiten Grades kommen also auch die Eigenschaften der eigentlichen Flächen zweiter Klasse zu und man faſst beide zusammen als Flächen, deren Gleichung quadratisch ist, als Quadriks. Wir können daher die Sätze, die wir vereint bewiesen, getrennt aussprechen, z. B.:

Bewegt sich ein Punkt als Pol auf einer Ebene, so dreht sich seine Polare um einen Punkt, den Pol jener Ebene, und umgekehrt.

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden g, so dreht sich seine Polare um eine Gerade γ und umgekehrt.

Die Geraden g und γ heiſsen reziproke Polaren.

Aufgabe 2. Bewegt sich der Pol auf γ, so dreht sich die Polare um g.

Sind s' und s'' wieder die Punkte auf g, deren Polaren

σ' und σ'' sich in γ schnitten, und ist A ein Punkt auf γ, so geht seine Polare durch s' und durch s'', also durch g.

Aufgabe 3. Der Schnittpunkt S zweier reziproken Polaren g und γ ist ein Punkt des Quadriks.

Wenn g und γ sich in S schneiden, so liegen Pol und Polare für S ineinander, also gehört S zur Fläche.

Es sind durch die Polarität gegenseitig zugeordnet (konjugiert): Punkt und Ebene, Gerade und Gerade.

Aufgabe 4. Schneiden sich zwei reziproke Polaren, so sind sie Tangenten an F^2 im Schnittpunkt, und ihre Verbindungsebene gehört zur φ^2, d. h.: ist die Tangentialebene an F^2 in S.

Weil S auf dem Gebilde liegt, so ist seine Polare zugleich die Tangentialebene, und weil S auf g, so geht diese Polare durch γ und weil S auf γ, so geht sie durch g.

Aufgabe 5. Eine Punktreihe und sein polares Ebenenbüschel sind projektiv.

Aufgabe 6. Schneiden sich die Geraden g in einem Punkt S, so liegen die Polaren γ in einer Ebene.

Aufgabe 7. Bilden die Geraden g ein Strahlenbüschel, so bilden die reziproken wieder ein Strahlenbüschel.

Es liegen alle γ in der Polaren von S, der Schnittpunkt zweier γ ist der Pol der Ebene der g.

Aufgabe 8. Die beiden Strahlenbüschel sind projektiv.

Denkt man sich im Schnittpunkt S das Lot l auf der Ebene der g, so liegen die Pole der Ebene durch l und g_k auf γ_k und bilden eine dem Büschel projektive Punktreihe.

Aufgabe 9. Wenn g (durch zwei Punkte) gegeben ist, die Gleichung von γ in Punktkoordinaten aufzustellen.

Da die gewöhnlichen Achsenkoordinaten der Ebene gleich $-\frac{\sigma_i}{\sigma_4}$ sind, so haben wir gemäfs § 12 S. S. IX Teil 1 S. 71, da wir in σ_1 und σ_2 zwei Ebenen von γ kennen,

$$\frac{x - x_1}{[\sigma_2' \sigma_3'']} = \frac{y - y_1}{[\sigma_3' \sigma_1'']} = \frac{z - z_1}{[\sigma_1' \sigma_2'']},$$

wo der Punkt 1 z. B. der Punkt B des § 12 S. S. IX Teil 1 ist, also

$$x_1 = [\sigma_3' \sigma_4''] : [\sigma_1' \sigma_3'']; \; y_1 = 0; \; z_1 = [\sigma_1'' \sigma_4'] : [\sigma_1' \sigma_3''].$$

Aufgabe 10. Die Sätze sub Aufgaben 6, 7, 8 durch Rechnung zu erweisen.

[Der Parameter λ bleibt beim Wechsel von s auf σ unverändert.]

Man kann auch jedem Punkt auf einer beliebigen Geraden γ den Punkt zuordnen, in welchem g von der Polaren des Punktes geschnitten wird, und ebenso jeder Ebene durch g die Ebene des Büschels zuordnen, welche durch den Pol geht. Als Träger dieser Zuordnungen wird die Gerade zum Raumelement und man gelangt so von einer andern Seite her zur Liniengeometrie (vgl. Abschnitt III, S. S. IX Teil 1), welche von Plücker und Kummer begründet, durch Reye und Sturm ausgebaut ist.

Aufgabe 11. Zwei konjugierte Punkte, desgl. zwei konjugierte Ebenen werden durch ihren Quadrik harmonisch getrennt.

Der Satz sagt aus: Nimmt man auf einer Sehne AB einen beliebigen Punkt P und konjugiert zu P den Punkt Q der Punktreihe AB, welcher auf der Polarebene von P liegt, so werden P und Q durch die Endpunkte der Sehne harmonisch getrennt.

Legt man durch die Schnittgerade zweier Tangentialebenen eine beliebige Ebene ε, und konjugiert zu ε die Ebene η des Büschels durch den Pol von ε, so werden ε und η durch die Tangentialebenen harmonisch getrennt. Grund: Wenn A und B durch C und D getrennt werden, so werden C und D durch A und B harmonisch getrennt.

Der Satz sub Aufgabe 11 kann auch so ausgesprochen werden: Der Quadrik liefert auf jeder Geraden die Hauptpunkte einer Involution für die Punktreihe und ebenso die Hauptebenen der Involution für das Büschel.

Aufgabe 12. Durch eine Gerade g an die F^2 die Tangentialebenen zu legen.

Man konstruiere zu zwei Punkten auf g die Polaren, ihr Schnitt ist γ; γ schneidet die F^2 in A und B, so sind die Ebenen durch g und A sowie durch g und B die verlangten.

Aufgabe 13. Die Bedingung dafür, daſs sich durch g reelle Tangentenebenen legen lassen, aufzustellen.

γ muſs die F^2 schneiden.

Aufgabe 14. Wenn sich eine Sehne $A_{ik} B_{ik}$ um einen festen Punkt $P \{ s'$ dreht, den Ort der Punkte s' zu bestimmen, für welche das Doppelverhältnis $(A_{ik} B_{ik} S' S)$ konstant ist und gleich c.

Ist $c = -1$, so ist dieser Ort die Polare von S', allgemein ist λ der Bruch $\lambda_1 : \lambda_2$, wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung 9) sind. Wir haben $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2P}{G(s)}$; $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{G(s')}{G(s)}$, also das Resultat

$$(c+1)^2 G(s) G(s') = 4 c P^2 (s' s).$$

Der Ort ist also ein Quadrik, der, wenn $c = -1$, in die (doppelte) Polarebene ausartet. Die Gleichung ist erfüllt, wenn $P(s s') = 0$ und $G(s) = 0$, d. h. alle diese Flächen schneiden F^2 in der Berührungskurve des Tangentenkegels von P an die F^2 und wenn P auf F^2, so ist der Ort für jeden Wert des c die Tangentialebene in P. Was wird aus dem Ort, wenn P ein Doppelpunkt des F^2? Was, wenn $c = +1$?

Aufgabe 15. Den Tangentenkegel darzustellen, wenn seine Spitze zum Anfangspunkt gewählt wird.

Da $x = \xi + x'$, so haben wir zu setzen $\frac{s_1}{s_4} = \frac{r_1}{r_4} + \frac{s_1'}{s_4'}$, also $s_i = r_i s_4' + s_i' r_4$; wo $i = 1, 2, 3$; $s_4 = 0 s_4' + s_4' r_4$.

Es ist $P(s s') = s_4' P(r s') + r_4 P(s' s') = s_4' P(r s') + r_4 G(s')$

$$G(s) = s_4'^2 G(r) + 2 r_4 s_4' P(r s') + r_4^2 G(s'),$$

also

$$K(s) \{ P^2 (r s') - G(r) G(s') = 0 = \Sigma r_i r_k (\sigma_i \sigma_k - a_{ik} G(s')).$$

Hier ist der Punkt $r \{ r_1 r_2 r_3 0$, d. h. es ist der durch die Richtungsfaktoren $r_1 r_2 r_3$ bestimmte Punkt im Unendlichen.

Aus der Gleichung $k(s) = \Sigma r_i r_k (\sigma_i \sigma_k - a_{ik} G)$ ist die vierte Koordinate verschwunden.

Der Kegel ist reell, sobald er von Einer Ebene in einem reellen Kegelschnitt geschnitten wird, z. B. von einer Parallelen zur Ebene $r_3 = 0$, d. h. zur z-Ebene, und ist imaginär, sobald es der Schnitt ist. Die Bedingung findet man S. S. VIII S. 199 u. f., es mufs $\alpha_{33} > 0$ und $(\lambda_1 + \lambda_2) : A$, d. i. $(a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos w) : A > 0$ sein.

Aufgabe 16. Gegeben eine Sehne AB und auf ihr ein Punkt P, es soll das Rechteck aus den Abschnitten der Sehne berechnet werden.

$P \} s'$; die Sehne habe die Richtungsfaktoren a_1, a_2, a_3, so geben $\frac{x - x_1}{a} = R$ etc., wenn R entweder PA oder PB bezeichnet $s_i s_4' = s_i' s_4 + R a_i s_4 s_4'$, wo i von 1 bis 3 geht, und $s_4 s_4' = s_4 s_4' + 0 R s_4 s_4'$, also

$$\frac{s_4'^2 G(s)}{s_4^2} = 0 = G(s') + s_4' R P(s, t) + s_4'^2 R^2 G(t),$$

wo $t \} a_1, a_2, a_3, 0$, d. h. der in der Richtung der Sehne unendlich ferne Punkt, also

$$11) \qquad R_1 R_2 = \frac{G(s')}{s_4'^2 G(t)} = \frac{G(x', y' z', 1)}{G(t)}.$$

Nennen wir (S. S. VIII S. 130) $G(s')$ bezw. $G(x', y', z', 1)$ die Potenz des Ouadriks G im Punkte $P \} s'$ und $G(t) = G(a, b, c, 0)$ die (Richtungs)potenz der Sehne, so haben wir den Potenzsatz:

Das Rechteck aus den Abschnitten aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen ist gleich der Potenz des Punktes, dividiert durch die Potenz der Sehne.

Aufgabe 17. Satz von Newton: Das Verhältnis aus den Rechtecken der Abschnitte zweier sich im selben Punkt schneidenden Sehnen bleibt unverändert, wenn beide Sehnen parallel in parallelen Ebenen verschoben werden.

Aufgabe 18. Ort der Punkte, deren Potenzen in Bezug auf zwei gegebene Quadriks ein festes Verhältnis λ haben

$$G_1(s) - \lambda G_2(s) = 0$$

also ein Quadrik, der durch den Schnitt von G_1 und G_2 geht.

Aufgabe 19. Auf jedem Quadrik einer Schar haben die Potenzen für zwei feste Flächen der Schar ein festes Verhältnis.

Aufgabe 20. Die Quadrate der Tangenten vom selben Punkt verhalten sich wie die zugehörigen Richtungspotenzen.

Damit die Tangente reell ist, müssen G (s') und G (t) vom gleichen Zeichen sein. Wir haben am Beispiel der Funktion φ (a, b, c) gesehen, dafs es quadratische Formen giebt, die ihr Zeichen nicht wechseln; ist die homogene quadratische Form dreier Variabeln G (t) von dieser Art, die man definite nennt, so hängt die Realität der Tangenten nur vom Zeichen des G (s') ab.

Aufgabe 21. Wenn die Polare von P { s' das Gebilde G nicht schneidet, ist K (s) definit.

Aufgabe 22. Ein autopolares Tetraeder zu konstruieren.

Die Ecke 1 ist willkürlich, Ecke 2 auf eine Fläche gebannt, die Ecke 3 auf eine Linie, die 4. der Pol für die Ebene der 3 ersten.

Aufgabe 23. Das Stück jeder dritten Tangente zwischen zwei festen Tangenten eines Tangentenkegels wird vom Berührungspunkte und der Polare der Spitze harmonisch geteilt.

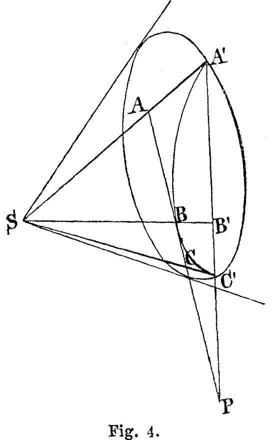


Fig. 4.

Fig. 4. Da P der Pol von SB, so sind A' B' C' P harmonisch, also S (A B C P) vier harmonische Strahlen und A B C P vier harmonische Punkte. Alle Strahlen durch den Berührungspunkt einer Tangentenebene werden zwischen einem festen Tangentenkegel und der Polare seiner Spitze harmonisch geteilt.

Aufgabe 24. Wenn eine Gerade einen Tangentenkegel beschreibt, so umhüllt ihre reziproke Polare die Berührungskurve

cf. Aufgabe 6 und Aufgabe 4.

Aufgabe 25. Die Tangentialebenen in den Ecken eines einer F^2 eingeschriebenen Tetraeders schneiden die Gegenseiten in vier Graden, welche auf einer Fläche zweiten Grades liegen.

Die vier Punkte seien $A_1 A_2 A_3 A_4$; die Ebene $A_2 A_3 A_4$ habe die Form $x_1 = \Sigma \gamma_{1i} s_i$ etc., dann lassen sich, da die vier Ebenen sich nicht in Einem Punkt schneiden, also die

Determinante der γ nicht verschwindet, die s durch die x ebenfalls in homogenen linearen Gleichungen ausdrücken, und durch diese Substitution geht G(s) über in H(x), wo H ebenfalls eine quadratische homogene Form wie G ist, die wir also auch G(x) nennen können. Da G(x) verschwinden mufs, so bald je drei der x verschwinden, müssen in G(x) die quadratischen Glieder fehlen d. h. $a_{ii} = 0$ sein und die Gleichung der Tangentialebene im Punkt A_i ist:

$$t_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4,$$

wo $a_{ii} = 0$, also die Variabel x_i fehlt. Es ist nun:

$$A t_1 t_3 + (b x_1 + c t_1)(d x_3 + e t_3) = 0$$

eine F^2, auf der die Schnittlinien von t_1 und x_1, sowie t_3 und x_3 liegen; desgleichen

$$A' t_2 t_4 + (b' x_2 + c' t_2)(d' x_4 + e' t_4) = 0$$

eine F^2, auf der die Schnittlinien von t_2 und x_2 und die von t_4 und x_4 liegen. Die Konstanten lassen sich nun so bestimmen, dafs die beiden Flächen identisch werden.

Man findet

$$F^2 \{ p t_1 t_3 + (x_1 a_{13} \delta + a_{23} a_{34} t_1)(a_{13} \delta x_3 + a_{14} a_{12} t_3)$$
$$\{ p t_2 t_4 + (x_2 a_{24} \delta + a_{41} a_{43} t_2)(a_{24} \delta x_4 + a_{23} a_{21} t_4),$$

wo

$$\delta = a_{12} a_{34} + a_{14} a_{23} - a_{13} a_{24} \text{ u. } p = a_{24} a_{13} \delta - a_{14} a_{12} a_{34} a_{32}.$$

Aufgabe 26. In jedem Tangentialtetraeder (d. i. der F^2 umgeschriebenen), liegen die Ecktransversalen nach den gegenüberliegenden Berührungspunkten auf einer Fläche zweiten Grades.

Duale (polare) Satz (zum vorigen).

Aufgabe 27. Sind $x_1 = 0$ bis $x_4 = 0$ die Gleichungen der Seitenebenen eines autopolaren Tetraeders, so läfst sich G(s) auf die Form bringen:

$$\Sigma a_k x_k^2 = 0.$$

Die Variabeln x_i sind Gröfsen, die den Abständen des durch sie bestimmten Punktes von den betreffenden Ebenen (die als Koordinatenebenen von Tetraederkoordinaten dienen) proportional sind. Die Ecke D z. B ist $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = c$, ihre Polarebene ist $x_4 = 0$. Denken wir uns die allgemeine Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, so erhalten wir durch

wörtliche Wiederholung unserer früheren Rechnung für die Polaren die Koordinaten $\sigma_i(x)$. Die Ecke D ergiebt also a_{14}, a_{24}, a_{34}, gleich Null, da die Polare von C die Ebene $x_3 = 0$ ist, so müssen auch a_{23} und a_{13} verschwinden, und die Ecke B liefert $a_{12} = 0$.

Aufgabe 28. Die Gleichung der F^2 in Linienkoordinaten.

Die Gerade sei a_i, A_i wo i die Werte 1, 2, 3, durchläuft; wir bestimmen sie durch den Punkt s′, wo $s_1' = A_3$, $s_2' = 0$, $s_3 = -A_1$, $s_4' = a_2$ und haben für den beliebigen Punkt s dann $s_i = s_i' + a_i s_4' \lambda$, wo $a_4 = 0$ ist. Als Bedingung dafür, daſs die Gerade Tangente an die F^2 sei, haben wir dann (Gleichung 9)

$$\alpha) \qquad P^2(s', a) = G(s')\, G(t),$$

wo t wieder den in der Richtung der Geraden unendlich fernen Punkt bezeichnet. Die Gleichung α hätten wir auch sofort ansetzen können, da sie nur aussagt, daſs die Gerade auf einem Tangentenkegel der F^2 liegt. (Aufgabe 15.)

Diese Bedingung α scheint nun vom 4. Grade zu sein und ihre Auswertung sehr mühselig, aber wenn man sich erinnert, daſs $P(s' s'')$ sich nicht ändert, wenn man s′ und s″ vertauscht, daſs also $\Sigma s_i' \sigma_i = \Sigma s_i \sigma_i'$ ist, so hat man wenn $\sigma_i(s') = P_i$ gesetzt wird, und $\sigma_i(t) = \alpha_i$,

$$(A_3 P_1 - A_1 P_3 + a_2 P_4)(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3)$$
$$- (a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3)(A_3 \alpha_1 - A_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_4) = 0.$$

Benutzt man nach der Multiplikation die Gleichung $\Sigma a_i A_i = 0$, so tritt der Faktor b heraus, und man erhält

$$A_2(-P_1 \alpha_3 + P_3 \alpha_1) + A_3(P_1 \alpha_2 - P_2 \alpha_1) + A_1(P_2 \alpha_3 - P_3 \alpha_2)$$
$$+ a_2(P_4 \alpha_2 - P_2 \alpha_4) + a_3(P_4 \alpha_3 - P_3 \alpha_4) + a_1(P_4 \alpha_1 - P_1 \alpha_4).$$

In Folge der Symmetrie hat man nur zwei beliebige untereinanderstehende Glieder z. B. A_3 und a_3 auszurechnen und erhält, wenn die Koeffizienten der a_{ik} in der Determinante A in S. S. VIII, also $| a_{11}\, a_{22}\, a_{33} |$, mit γ_{ik} berechnet werden, das Resultat:

$$12) \qquad \Sigma \gamma_{ik} A_i A_k + \Sigma (a_{ik} a_{44} - a_{i4} a_{k4}) a_i a_k$$
$$+ 2 \Sigma A_i \Sigma a_p (a_{p,i-1} a_{4,i+1} - a_{p,i+1} a_{i-1,4}) = 0$$

dabei ist $i - 1$ für $i = 1$ als 3 und $i + 1$ für $i = 3$ als 4 anzusehen. Also:

Die Gleichung der F^2 ist auch in Linienkoordinaten vom zweiten Grade,

oder

jede F^2 setzt einen Linienkomplex zweiten Grades, wie wir dies für die Kugel nachgewiesen.

Auf jedem Punkt liegt ein Strahlenkegel zweiten Grades und auf jeder Ebene umhüllen die Strahlen einen Kegelschnitt.

Aufgabe 29. Durch eine in ihren Koordinaten gegebene Gerade a_i, A_i die Tangentialebenen an die F^2 zu legen bezw. auf jeder Geraden die Schnittpunkte mit der F^2 zu bestimmen.

Die Aufgabe ist die duale zu der sub Aufgabe 28 zunächst erledigten, die Schnittpunkte der Geraden mit der F^2 durch die Koordinaten auszudrücken. Wir hatten als ausgezeichneten Punkt den unendlich fernen gewählt, ihm entspricht die Ebene 0 g mit den Koordinaten A_1 A_2 A_3 0; dem zweiten Punkte, in dem die Gerade die y-Ebene schneidet, entspricht die Ebene durch g, welche der y-Achse parallel ist; sie hat die Koordinaten — c, 0, a, B, jede andere Ebene ist die $\sigma' + \lambda \sigma''$, und wir finden die passenden Werte des λ, indem wir von der Gleichung G(s) zur Gleichung $\Gamma(\sigma)$ übergehen. Stellen wir die Bedingung auf, daſs die Ebene durch g die Fläche berühre, also zur φ^2 gehöre, so ergeben dieselben Gleichungen dasselbe Resultat mit Vertauschung von γ_{ik} mit g_{ik} und a_{ik} mit α_{ik}, und man hat dann zugleich in 12) die Gleichung der φ^2 in Linien- (Strahlen-) Koordinaten.

Aufgabe 30. Drei Ecken eines Tetraeders bewegen sich je auf einer festen Ebene, und ihre Ebene geht durch einen festen Punkt. Die drei in den vier Ecken zusammentreffenden Kanten gehen je durch einen festen Punkt, Ort dieser Ecke.

Vgl. S. S. VIII § 29 Aufgabe 29. Die gebundenen Ecken seien A B C, die vierte sei P; die drei festen Punkte der Kanten seien A_1 B_1 C_1, die festen Ebenen seien ε_i und die Ebene A B C sei ν und gehe durch den festen Punkt S. Die Gerade A P hat die Strahlenkoordinaten a_1 A_1. Die Schnittgerade von ε_1 und ν schneidet A P. Sind die Ebenen S A_1 B_1 etc. die Koordinatenebenen z etc., so ist die Gleichung von ν: $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$, d. h. $\nu \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; die Koordinaten von ε seien u v w; dann hat ihre Schnittgerade die

Koordinaten $v_1 \lambda_3 - w_1 \lambda_2$; $u_1 - \lambda_1$ und $PA \{ a = x - p$, $b = y$, $c = z$, $A_1 = 0$, $B_1 = zp$, $C_1 = -yp$. Die Bedingung, dafs die beiden Geraden sich schneiden (Teil 1 § 12 Aufgabe 3) giebt:

$$\lambda_1 (w_1 zp + v_1 yp - x + p) + \lambda_2 (- u_1 yp - y) + \lambda_3 (- w_1 zp - z) = 0.$$

Die entsprechende für PB und PC erhalten wir in gleicher Weise; und somit ergiebt sich als Ort des Punktes eine Fläche dritten Grades.

---

§ 5. Centrum, Diametralebenen, Durchmesser.

Aufgabe 1. Die Polarebene eines in der Richtung a, b, c unendlich fernen Punktes.

$a \sigma_1 + b \sigma_2 + c \sigma_3 = x \sigma_1 (a, b, c, 0) + y \sigma_2 (a) + z \sigma_3 (a) = 0$. Also (S. S. VIII § 30):

Die Polarebenen aller unendlich fernen Pole gehen durch den Punkt $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$.

In diesem Punkt M wird jede durch ihn gehende Sehne, da sie durch M und den unendlich fernen Pol harmonisch geteilt wird, halbiert, Punkt M heifst daher das Centrum oder der Mittelpunkt. Jede durch ihn gehende Ebene Diametral- (Durchmesser-) Ebene, jede durch ihn gehende Gerade Durchmesser (Diameter).

Die Gleichungen $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ ergeben $M \{ \alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44} \{ m_i$.

Die Flächen $\alpha_{44} = 0$, die Paraboloïde, haben also ihr Centrum im Unendlichen in der Richtung $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$.

Aufgabe 2. Den Pol einer Diametralebene zu bestimmen.

Geometrisch ist klar, dafs der Pol im Unendlichen liegt. Die Diametralebene sei $s_1 u + s_2 v + s_3 w + s_4 t = 0$, wo $m_1 u + \dots m_4 t = 0$. Der Pol wird bestimmt durch $\lambda u = \sigma_1 (x')$; $\lambda v = \sigma_2$, $\lambda w = \sigma_3$, $\lambda t = \sigma_4$ und ergiebt für s_4' den Wert $\frac{\lambda}{A} (u \alpha_{14} + v \alpha_{24} + w \alpha_{34} + t \alpha_{44})$ d. h. $s_4' = 0$ und $x' : y' : z' = (u \alpha_{11} + v \alpha_{12} + w \alpha_{13} + t \alpha_{14}) : s_2 (\Gamma (u, v, w, t)) : s_3 (\Gamma (u, v, w, t))$. Ist $A = 0$, so wird der Pol unbestimmt.

Aufgabe 3. Den Ort der Mitten aller der Richtung a, b, c parallelen Sehnen zu bestimmen. Die Diametralebene des Pols a, b, c, sie ist dem Durchmesser und dieser ihr konjugiert (zugeordnet).

Aufgabe 4. Die charakteristische Eigenschaft des Punktes M durch Rechnung zu bestimmen.

Es war $G(s + s') = G(s) + 2P(s, s') + G(s')$.

Sei die Verbindungsgerade SS' bestimmt durch S und die Richtungsfaktoren a, b, c, so haben wir für s' zu setzen: $s_1' = ra$, $s_2' = rb$, $s_3' = rc$, $s_4' = r0$, $s' = rs''$, und

$$G(s + s') = G(s) + 2rP(s, s'') + r^2 G(s'') = 0$$

enthält die Bedingung dafür, dafs ein Punkt der Geraden, welche in der Richtung s'' durch s geht, die Fläche schneidet. Soll nun s in der Mitte der beiden Schnittpunkte liegen, so müssen die beiden Werte von r, welches der Entfernung vom Punkt S proportional ist, entgegengesetzt gleich werden und die Bedingung dafür ist:

$$13) \qquad P(s, s'') = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung der Polarebene des in der Richtung a, b, c unendlich fernen Punktes. Damit ist also der Satz in Aufgabe 3 durch Rechnung bewiesen. Der Ort der Mitten aller der Richtung a, b, c parallelen Sehnen ist die Polarebene des zugehörigen unendlich fernen Punktes.

Umgekehrt wird jede Sehne, die in dieser Richtung durch einen Punkt A dieser Ebene gezogen wird, in A halbiert.

Für den Punkt $M \{ \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ ist aber die Gleichung 13 identisch erfüllt, also wird in M jede Sehne halbiert.

Aufgabe 5. Die Gleichung einer Sehne.

Sind s' und s'' zwei Punkte einer Geraden, welche auf der Fläche F^2 liegen (bezw. sind es zwei Ebenen einer Geraden, welche die Fläche φ^2 berühren), so gilt für jeden Punkt $s \{ s' + \lambda s''$ ihrer Verbindungs- (Schnitt-) Geraden, und nur für diesen, die Gleichung

$$P(s, s') + P(s, s'') = P(s', s'')(1 + \lambda).$$

Diese Gleichung ist nur der rechnerische Ausdruck des Satzes in Aufgabe 3 und 4, umgekehrt ist jener Satz darin

bewiesen, da $P(u, v) + P(u, w) = P(u, v + w)$ ist. Ist M_s die Mitte der Sehne $\} m \{ x' + x'', .. 2$, so ist:

$$14) \qquad P(s, m) = P(s' s'')(1 + \lambda).$$

Die Sehne liegt also in einer Ebene, welche der Polarebene ihrer Mitte parallel ist. Alle Sehnen, welche dieselbe Mitte haben, liegen also in einer Ebene, welche der Polaren dieses festen Punktes parallel ist.

Aufgabe 6. Ort der Mitten aller Sehnen, welche durch einen festen Punkt P gehen?

Da $P(m, m) = G(m) = 2P(s', s'')$ ist, und $S \{ x, y, z, 1 + \lambda$, wo $x = x' + \lambda x''$, so ist $G(m) = P(s, m)$ wenn

$$m \left\{ \frac{x' + x''}{2} .. \{ \xi, \eta, \zeta, 1 \text{ und } s \{ x, y, z, 1, \right.$$

also $x(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14}) + \ldots = \xi^2 a_{11} + \ldots.. + a_{44}$, also:

Der Ort der Mitten aller Sehnen, welche durch einen festen Punkt P gehen, ist ein dem gegebenen ähnlicher Quadrik, auf dem P liegt.

Da $P(s, m)$ die Polarform von $G(s)$, so liegt der Berührungskegelschnitt des von P an G gelegten Kegels auf diesem Quadrik.

Wird s als Ebene, $G(s)$ als φ^2 gedeutet, so haben wir den dualen Satz:

Die Halbierungsebene des Winkels zweier Tangentialen, deren Schnittgerade auf einer festen Ebene liegt, umhüllt eine ähnliche φ^2.

Aufgabe 7. Durch einen Punkt M einen ebenen Schnitt zu legen, von dem M die Mitte ist.

Aufgabe 7a. Die Gleichung der Tangentialebene aus 14) abzuleiten.

Aufgabe 8. Bewegt sich eine Sehne, so daſs die Potenz ihrer Mitte konstant bleibt, so umhüllt sie den homothetischen Quadrik, den die Mitte beschreibt.

Aufgabe 9. Die Polarebene des Centrums?

$s_4 \sigma_4(m) = 0$, und da $\sigma_4(m)$ nur 0 ist, wenn $A = 0$, in welchem Falle das Centrum auf jeder Polarebene liegt, so ist $s_4 = 0$, d. h.:

Die Polarebene des Centrums ist die unendlich ferne Ebene.

Aufgabe 10. Die Beziehung zwischen den Polarebenen der Punkte eines und desselben Durchmessers.

Ist σ auf dem Durchmesser $t \{ a, b, c, (0)$, so ist $x_p \{ x_m + r a$; $s_{1,p} = s_{1,m} + r a s_4$; $s_{4,p} = s_{4,m} + r\, 0\, s_4$, also $P(s, s_p) = P(s, s_m) + r s_4 P(s, t)$; $P(s, s_m) = s_4 \sigma_4(m)$, also $P(s, s_p) = s_4 (\sigma_4(m) + r P(s, t))$, d. h.:

Die Polarebenen aller Punkte auf demselben Durchmesser sind der konjugierten Ebene parallel.

Aufgabe 11. Wann steht ein Durchmesser auf seiner konjugierten Ebene senkrecht?

Es mufs der Durchmesser der Normalen auf die Ebene parallel sein, dies giebt für rechtwinklige Koordinaten die Bedingungen $a : b : c = \sigma_1(t) : \sigma_2(t) : \sigma_3(t)$ bezw. das Gleichungssystem

$$(a_{11} - \lambda)\, a + a_{12}\, b + a_{13}\, c = 0,$$
$$(a_{12}\, a + (a_{22} - \lambda)\, b + a_{23}\, c = 0 \text{ etc.}).$$

Das System giebt für a, b, c bestimmte Quotienten, wenn die Determinante der drei homogenen linearen Gleichungen verschwindet. Dies giebt für λ eine Gleichung dritten Grades, also es giebt generaliter drei Durchmesser einer F^2, welche auf ihrer konjugierten Ebene senkrecht stehen, sie heifsen die Hauptachsen.

Aufgabe 12. Für die Paraboloïde ist eine der Werte, da $\lambda = 0$.

Die betreffende Gleichung dritten Grades in λ wird:

$$15)\quad \lambda^3 - \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) - a = 0$$

wo α_{11} etc. sich auf die Form $K(s) = a_{11} s_1^2 + \ldots a_{33} s_3^2$ beziehen, also dieselbe Bedeutung haben wie in A. G. d. Eb. und $a = A$ dieser Schrift, also gleich α_{44}, d. h. a ist die Determinante der Form $K(s) = G(s_1\, s_2\, s_3\, 0)$.

Die Gleichung 15) heifst die Hauptachsengleichung.

Aufgabe 13. Die Hauptachsen stehen aufeinander senkrecht. Die Rechnung siehe § 8.

Da die Hauptachsen in M aufeinander senkrecht stehen, so ist die Ebene zweier Hauptachsen die Polarebene zur dritten.

Aufgabe 14. Die Potenz des Centrums.

$$G(s_m) = s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3 + s_4 \sigma_4 = s_4 \sigma_4 = \alpha_{44} A$$
$$G(\xi, \eta, \zeta, 1) = A : \alpha_{44}.$$

Aufgabe 15. Die Länge des Halbmessers der Richtung $t\{a, b, c, 0,$ wo a, b, c die Richtungskoordinaten, also $\varphi(a, b, c) = 1$.

Da R_1 und R_2 der Gleichung 1) § 4 entgegengesetzt gleich sind, so ist

$$16) \qquad R^2 = \frac{-A}{\alpha_{44}\, G(t)}.$$

Aufgabe 15a. Die Länge eines Haupthalbmessers.

Für rechtwinklige Koordinaten ist $G(t) = a\,\sigma_1(a) + \dots = \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = \lambda$, also

$$17) \qquad R^2 = \frac{-A}{\alpha_{44}\,\lambda}.$$

Die Summe der Quadrate der drei Haupthalbmesser ist (vgl. S. S. VIII § 30 S. 142)

$$\frac{-A}{\alpha_{44}} \frac{(\lambda_1 \lambda_2 + \dots)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{-A(\alpha_{11} + \alpha_{22} + {}_{33})}{\alpha_{44}^2}.$$

Aufgabe 16. Die drei Hauptachsen bilden mit der unendlich fernen Ebene ein autopolares Tetraeder; die Gleichung der F^2 bezogen auf dies Tetraeder aufzustellen.

Gemäfs § 4 haben wir, da hier $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$, $x_4 = s_4$,

$$a'_{11} s_1^2 + a'_{22} s_2^2 + a'_{33} s_3^2 + a'_{44} s_4^2 = 0$$

und $\frac{a'_{11}}{a'_{44}} = \frac{-1}{R_1^2}$ etc., $\alpha_{44} \lambda_1 x^2 + \dots$ und wenn wir den konstanten Faktor $\alpha_{44} : A$ unterdrücken $\boldsymbol{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + A : \alpha_{44} = 0}$ bezw.

$$18) \qquad \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2} - 1 = \mathbf{0},$$

wenn die Längen mit a, b, c bezeichnet sind. Hierbei ist es willkürlich, welche der λ wir der x-Achse etc. zuweisen. Die gesperrten Formen heifsen die Hauptformen der centralen F^2, sie enthalten, abgesehen von der Konstante $A : \alpha_{44}$, nur die Wurzeln der Hauptachsengleichung.

Die drei Hauptachsen bilden ein System konjugierter Durchmesser (und zwar das einzige von rechten Winkeln), solcher Systeme läfst sich eine ∞^2 fache Menge bilden. Der

erste Durchmesser ist völlig beliebig, der zweite an die konjugierte Ebene gebannt, der dritte der zur Ebene der ersten beiden konjugierte. Mit der unendlich fernen Ebene bildet jedes Tripel ein autopolares Tetraeder.

Bezogen auf ein Tripel als Achsen ist daher die Gleichung der centralen $F^2 : \alpha s_1^2 + \beta s_2^2 + \gamma s_3^2 + \delta s_4^2 = 0$, wo $\alpha : \delta = \frac{-1}{R^2} = \frac{\alpha_{44}}{A} G(t) = \frac{-1}{a_1^2}$, also

$$19) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0.$$

Aufgabe 17. Das Parallelepiped aus drei konjugierten Halbmessern bezw. das um die centrale F^2 in den Endpunkten konjugierter Durchmesser umgeschriebene Parallelepiped ist konstant.

Sei der unendlich ferne Punkt des ersten Durchmessers $t_1 \{ a_1$, der des zweiten $t_2 \{ a_2$, des dritten $t_3 \{ a_3$. Nennen wir die Koeffizienten von a_k, b_k, c_k in der Determinante dieser Gröſsen α_k, β_k, γ_k, so ist

$$\begin{aligned} \sigma_{3,1} &= L_3 \alpha_3; & \sigma_{3,2} &= L_3 \beta_3; & \sigma_{3,3} &= L_3 \gamma_3 \\ \sigma_{2,1} &= L_2 \alpha_2; & \sigma_{2,2} &= L_2 \beta_2; & \sigma_{2,3} &= L_2 \gamma_2 \\ \sigma_{1,1} &= L_1 \alpha_1; & \sigma_{1,2} &= L_1 \beta_1; & \sigma_{1,3} &= L_1 \gamma_1 \end{aligned}$$

hieraus $G(t_3) = L_3 (a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3) = L_3 \sin E$, wo $\sin E$ den Eckensinus der von den drei Geraden gebildeten körperlichen Ecke (vgl. S. S. IX Teil 1 S. 50) bezeichnet.

Ebenso ist $G(t_2) = L_2 \sin \varepsilon$, $G(t_1) = L_1 \sin \varepsilon$.

Es ergiebt sich sofort ganz direkt

$$\begin{aligned} \alpha_3 = b_1 c_2 - c_2 b_1 &= \frac{L_1 L_2}{\alpha_{44}^2} (\tau_{12} \tau_{23} - \tau_{13} \tau_{22}) \\ &= \frac{L_1 L_2}{\alpha_{44}} \sigma_{31} \sin E \end{aligned}$$

also

$$20) \qquad \mathbf{L_1 L_2 L_3} = \frac{\alpha_{44}}{\mathbf{\sin E}}; \; L_1 L_2 L_3 \sin E = \alpha_{44} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

und (vgl. An. G. d. Eb. S. 142 F. 13)

$$21) \qquad G(t_3) = \frac{L_3^2}{\alpha_{44}} G(t_1) G(t_2).$$

Durch die Formel ist der Satz bewiesen; da das Volumen des Parallelepipeds gleich $a_1 b_1 c_1 \sin E$ ist, also $V^2 = - A^3 : \alpha_{44}^4$.

Aufgabe 18. Die Summe der reziproken Quadrate je dreier aufeinander senkrechter Halbmesser ist konstant.

Wenn man die drei Koordinatenachsen als senkrecht voraussetzt, ist der Satz eine unmittelbare Folge der Koordinatentransformationsformeln.

Aufgabe 19. Die Summe der Quadrate dreier konjugierter Halbmesser ist konstant.

Verifizieren läfst sich der Satz sofort dadurch, dafs, wenn man die drei Halbachsen zu Koordinatenachsen wählt, $L_3 = c_3 = a_{33}$, $L_2 = b_2 = a_{22}$, $L_1 = a_{11}$ und $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ bei der Transformation von dem rechtwinkligen Hauptachsensystem auf das des konjugierten Tripel ungeändert bleibt.

Aufgabe 20. Sind t_1 und t_2 zwei beliebige Durchmesser in der Polarebene von t_3, so ist:

$$G(t_3) = \frac{L_3^2}{\alpha_{44}} (G(t_1)\, G(t_2) - P^2(t_1, t_2)),$$

wo $P(t_1, t_2)$ die Polarform, also $a_1 \sigma_{21} + b_1 \sigma_{22} + c_1 \sigma_{23}$.

$$(\text{Es ist } G(t_3) = \frac{L_3^2}{\alpha_{44}} \Gamma(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).)$$

§ 6. Geradlinige Quadriks.

Es seien g und γ zwei reziproke Polaren, welche sich in S schneiden, dann sind es nach § 4 die Tangenten in S an die F^2, und $(g\gamma)$ ist die Tangentialebene an die F^2 in S. Zieht man darin eine Gerade, welche nicht durch S geht, so wird sie g in A und γ in α schneiden, sowie die Fläche F^2 in B und C. Die Linien BS und CS sind dann Tangenten, und da sie in S schon zwei zusammenfallende Punkte mit der F^2 gemein haben, so haben sie alle Punkte mit der Fläche gemeinsam, d. h.:

Wenn die Tangente und die Fläche aufser dem Berührungspunkt noch einen Punkt gemeinsam haben, so liegt die Tangente ganz auf der Fläche.

Aufgabe 1. Diesen Satz durch Rechnung zu beweisen.

In der Gleichung 9) verschwinden alle Glieder identisch, wenn gleichzeitig $G(s') = 0$, $G(s'') = 0$ und $P(s', s'') = 0$.

Die Tangenten SB und SC liegen also ganz auf der Fläche.

Aufgabe 2. Durch Rechnung zu zeigen, dafs die Gerade SB Tangente an die F^2 in jedem ihrer Punkte ist.

Ist $S\{S_i$ und $B\{B_i$, so ist ein beliebiger Punkt P von $SB\{S_i + \lambda B_i$; die Gleichung der Polarebene ist $P(S_i, S_i + \lambda B_i) = 0$, und es ist $P(S_i, S_i + \lambda B_i) = P(S_i S_i) + \lambda P(S_i, B_i) = 0$ und ebenso $P(B_i, S_i + \lambda B_i) = G(B_i) + \lambda P(S_i B_i)$ identisch 0.

Der Satz ist geometrisch aus dem Begriff der Tangente selbstverständlich.

Aufgabe 3. Durch Rechnung nachzuweisen, dafs die Strahlenkoordinaten von SB die Gleichung der F^2 in Strahlenkoordinaten identisch befriedigen.

Aufgabe 4. Die Tangente SB (desgleichen die Tangente SC) ist ihre eigene reziproke Polare.

Beweis: Die Polarebene jedes Punktes auf SB geht durch S, weil S Pol einer Ebene, welche SB enthält; und durch B, weil SB Tangente in B.

Aufgabe 5. Den Satz in Aufgabe 4 durch Rechnung zu beweisen.

Sind g und γ zwei reziproke Polaren, so mufs jeder Punkt von g auf der Polaren zu jedem Punkt von γ liegen; ist $g\{s' + \lambda s''$, so ist $\gamma\{\sigma' + \lambda \sigma''$ (in Ebenenkoordinaten) und für den Schnittpunkt von g und γ mufs $P(s' + \lambda s'', s') = 0$ und $P(s' + \lambda s'', s'') = 0$ sein, weil $P(s, t) = P(tr)$ bezw. $\Sigma s_i' \sigma_i = \Sigma s_i \sigma_i'$). Wir haben also

$$\text{b)} \qquad G(s') + \lambda P(s' s'') = 0$$
$$\lambda G(s'') + P(s' s'') = 0.$$

Soll ein Schnittpunkt existieren, so mufs $\lambda = \lambda$ sein, d. h.

$$P^2(s' s'') = G(s') G(s''),$$

d. h. s'' auf dem von s' ausgehenden Tangentenkegel liegen und umgekehrt, oder g mufs eine Tangente sein.

Soll nun g mit γ zusammenfallen, so mufs λ unbestimmt werden, d. h. es mufs gleichzeitig $G(s')$ und $P(s' s'')$ und

damit auch $G(s'') = 0$ sein, d. h. aber auch die Gröſse λ der Gleichung 9) wird unbestimmt, oder g liegt auf der Fläche und umgekehrt, wenn λ in 9) unbestimmt wird, wird es in dem vorliegenden System b auch unbestimmt.

Aufgabe 6. Wenn die Gerade g als Tangente gegeben ist, die Koordinaten des Berührungspunktes zu bestimmen.

Das System b) giebt (im Einklang mit Gleichung 9) $S\left\{s' - \frac{P(s' s'') s''}{G(s'')}\right.$.

Aufgabe 7. Ohne Koordinatentransformation zu zeigen, daſs für die Spitze des Tangentenkegels als Anfangspunkt die 4. Koordinate aus der Gleichung $P^2(s' s) - G(s') G(s) = 0$ verschwindet.

Aufgabe 8. Allgemein zu zeigen, daſs $P^2(s' s'') - G(s') G(s'')$ für zwei beliebige Punkte (bezw. Ebenen) der Verbindung $S' S''$ abgesehen von einem Faktor invariant ist.

Ist $t' = s' + \mu s''$, und entspricht t'' dem Parameter ν, so ist $P^2(t' t'') = G(t') G(t'') = (\mu - \nu)^2 (P^2(s' s'') - G(s') G(s''))$. Hiermit ist zugleich bewiesen, daſs auch $t' t''$ eine Tangente ist, und die ganze Gerade auf der Fläche k liegt.

Aufgabe 9. Zu zeigen (durch Rechnung), daſs der Berührungspunkt von $t' t''$ nnd $s' s''$ identisch ist.

Da $P(s' + \mu s'', \; s' + \nu s'') = G(s') + (\mu + \nu) P(s' s'') + \nu\mu G(s'')$ und $G(s' + \nu s'') = G(s') + 2\nu P(s' s'') + \nu^2 G(s'')$, so findet sich $t' - \frac{P(t' t'') t''}{G(t'')} = c\left(s' - \frac{P(s' s'') s''}{G(s'')}\right.$, wo $c = -\frac{P(s' s'') + \nu G(s'')}{G(s'')}$ ist.

Aufgabe 10. Zwei Tangentenkegel s' und s'' haben nur eine Kante gemeinsam.

Die Schnittkurve zerfällt in eine Gerade und eine Raumkurve dritten Gerades.

Aufgabe 11. Die Gleichung dieser Raumkurve aufzustellen.

Aufgabe 12. Wann zerfällt der Tangentenkegel in zwei Ebenen?

Verlegt man den Anfangspunkt in die Spitze und bezeichnet $a_{14} s_1 + a_{24} s_2 + a_{34} s_3$ mit q, so wird die Gleichung des Kegels $q^2 = a_{44} \varphi(s)$, wo $\varphi(s)$ die Funktion $G(s)$

bezeichnet, in der man s_4 gleich 0 setzt, also die in den drei Koordinaten $s_1\, s_2\, s_3$ homogene quadratische Form. Der Kegel zerfällt in die doppelt zu zählende Polarebene der Spitze, wenn die Spitze auf der Fläche; in zwei Ebenen, wenn er aufser der Spitze noch einen Doppelpunkt hat, also die $3\,\sigma$ eine von 0 verschiedene Lösung, in den s, d. h. aber, die Determinante mufs verschwinden. Man überzeugt sich leicht, dafs diese Bedingung, abgesehen von dem Faktor $-\,a_{44}^2$ identisch ist mit $A = 0$. Ist aber $a_{44} = 0$, so liegt die Spitze auf der Fläche, also kann der Tangentenkegel nur für die uneigentlichen Flächen zweiter Ordnung in zwei Ebenen zerfallen.

Aufgabe 13. Für den Kegel zerfällt die Tangentialebene durch jeden Punkt aufserhalb des Kegels in zwei Ebenen.

Aufgabe 14. In einem Punkt A einer Fläche F^2 die Tangenten zu bestimmen, welche ganz auf der Fläche liegen.

Für diese Tangenten mufs ihr unendlich ferner Punkt 1) auf der Tangentialebene liegen und 2) auf der Fläche; wir haben also $a\,\sigma_1 + b\,\sigma_2 + c\,\sigma_3 = 0$, $\varphi\,(a, b, c) = 0$, wo φ dieselbe Bedeutung wie in Aufgabe 12 hat. Sehen wir a, b, c als beliebige Variabel und nicht als Richtungsfaktoren der Geraden an, so stellt $\varphi\,(s_1\, s_2\, s_3) = 0$ einen Kegel dar, mit dem F^2 für $s_4 = 0$, d. h. für die unendlich fernen Punkte verschmilzt, wir nennen ihn den Asymptotenkegel der Fläche. Man sieht, es giebt im allgemeinen in jedem Punkte zwei solcher Tangenten (reell oder imaginär), sie heifsen die Haupttangenten. Aus der ersten Gleichung sieht man, was geometrisch evident, dafs die beiden Haupttangenten die Tangentialebene bestimmen. Hat die Fläche in S einen Doppelpunkt, so wird die zweite Gleichung identisch erfüllt, wie vom Kegel bereits bekannt ist.

Aufgabe 15. Die Punkte der Fläche zu bestimmen, für welche die beiden Haupttangenten zusammenfallen.

Setzen wir die Diskriminante der quadratischen Gleichung, die man nach Elimination, z. B. von c, wenn $\sigma_3 \neq 0$ ist, erhält, gleich 0, so erhält man als Ort der Punkte die Fläche zweiten Grades:

$$\psi = \sigma_1^2\,\alpha_{11} + \sigma_2^2\,\alpha_{22} + \sigma_3^2\,\alpha_{33} + 2\,\sigma_1\,\sigma_2\,\alpha_{12} + 2\,\sigma_1\,\sigma_3\,\alpha_{13} + 2\,\sigma_2\,\sigma_3\,\alpha_{23} = 0,$$

wo die α dieselbe Bedeutung wie in S. S. VIII haben, d. h. die Koeffizienten der a_{ik} in der Determinante $|a_{11}\, a_{22}\, a_{33}|$ der Form φ. Die Form ψ ist die Polarform von φ, aber die Fläche $\psi = 0$ ist nicht die Polarfläche des Kegels $\varphi = 0$.

Aufgabe 16. Die Fläche $\psi = 0$ hat in dem Punkte $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ einen Doppelpunkt.

Aufgabe 17. Die Fläche $\psi = 0$ ist, wenn der Koeffizient a_{44} in A, d. h. also α_{44} von 0 verschieden ist, von der Fläche G(s) nur durch das fehlende konstante Glied unterschieden. Ist $\alpha_{44} = 0$ (Paraboloide), so zerfällt der Asymptotenkegel.

Die Fläche F^2 hat also im Endlichen keinen Punkt, dessen Haupttangenten zusammenfallen.

Aufgabe 18. Die Punkte der F^2 zu bestimmen, deren Haupttangenten auf einander senkrecht stehen.

Nehmen wir das Koordinatensystem rechtwinklig, so ist die Bedingung $a a' + b b' + c c' = 0$ nach den Sätzen über die Wurzeln einer quadratischen Gleichung } mit

$$\text{c)}\quad (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \varphi\,(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

statt φ setzen wir besser k; die Gleichung c) ist wieder die einer Fläche zweiten Grades, welche in $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$ einen Doppelpunkt hat.

Ist $\alpha_{44} \neq 0$, so läſst sich der Ursprung in diesen Punkt verlegen, und der Effekt ist der, daſs in der transformierten Form $k\,(s_1\, s_2\, s_3)$ ungeändert bleibt und $a_{14}\, a_{24}\, a_{34}$ verschwinden (cf. S. S. VIII § 30). Die Fläche sub c) geht dann über in:

$$(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\; k\,(s_1\, s_2\, s_3) - \beta\,(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 0,$$

hierin bedeuten α_{ii} die Koeffizienten von $|a_{11}\, a_{22}\, a_{33}|$, und β ist α_{44}. Diese Fläche stellt an sich einen Kegel dar. Für die Punkte, in denen dieser Kegel die F^2 schneidet, ist $k = - a_{44}\, s_4^2$ und wir haben den Satz:

Die Punkte der eigentlichen Fläche zweiter Ordnung (welche nicht zu den Paraboloiden gehören), deren Haupttangenten auf einander senkrecht stehen, liegen auf einer Kugel.

Die Flächen, für welche der Punkt $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ im Endlichen existiert, für die also $\alpha_{44} \neq 0$, heiſsen

centrale Quadriks und der betreffende Punkt M ihr Centrum, also:

Im centralen Quadrik sind die Punkte normaler Haupttangenten vom Centrum gleich weit entfernt.

Aufgabe 19. Die Kugel der Aufgabe 18 hat noch eine zweite ausgezeichnete Eigenschaft, sie heifst Kugel von Monge.

Die Kugel von Monge ist der Ort der Spitzen der um den centralen Quadrik beschriebenen rechtwinkligen Dreikante.

Wir nehmen rechtwinkliges Achsensystem, als Nullpunkt das Centrum. Wir haben für die drei Berührungsebenen:

$$\text{a)} \qquad s_1 \sigma_{i,1} + s_2 \sigma_{i,2} + s_3 \sigma_{i,3} + s_4 \sigma_{i,4} = 0,$$

wo $\Sigma s_k \sigma_{ik} = \Gamma(\sigma_i) = 0$, also sind $\sigma_{i,k} : w_i$ die Richtungskosinus der Ebenen, wenn $w_i^2 = \sigma_{i,1}^2 + \sigma_{i,2}^2 + \sigma_{i,3}^2$ ist. Da die Ebenen zu je zwei aufeinander senkrecht stehen, so haben wir

$$\text{b)} \qquad \frac{\sigma_{1,k}^2}{w_1^2} + \frac{\sigma_{2,k}^2}{w_2^2} + \frac{\sigma_{3,k}^2}{w_3^2} = 1;$$

$$\sigma_{1,1}\sigma_{1,2} + \sigma_{2,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{3,1}\sigma_{3,2} = 0 \text{ etc.}$$

Bringt man in a) $s_4 \sigma_{i,4}$ auf die rechte Seite und berücksichtigt die Gleichung $\sigma_4^2 \alpha_{44} = K(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$, so erhält man durch Quadrierung und Addition der drei Gleichungen a) unter Anwendung von b)

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{s_4^2 (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})}{-\alpha_{44}}$$

und da $\alpha_{11} = a_{44} \alpha_{11}$, wo α_{11} rechts die Bedeutung wie in Aufgabe 18 hat,

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{-a_{44} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})}{\alpha_{44}} s_4^2$$

q. e. d.

Aufgabe 20. Die Ebene durch die Haupttangente und die Normale der Fläche im Berührungspunkt (Schnittpunkt) ist wieder eine Tangentialebene; es soll ihr Berührungspunkt bestimmt werden.

Die Gleichung der Normalen ist, da sie im Berührungs-

punkt auf der Tangentialen senkrecht steht, wenn man rechtwinklige Achsen wählt,

$$13)\qquad \frac{x - x'}{\sigma(x')} = \frac{y - y'}{\sigma(y')} = \frac{z - z'}{\sigma(z')}.$$

Nimmt man auf der Haupttangente als Punkt 1 den Punkt x' und als Punkt 2 den Punkt $t \{ a\, b\, c\, 0$, d. h. den (uneigentlichen) unendlich fernen, so ist jeder Punkt $P \} s' + \lambda t$ und jede Polarebene, welche, weil P auf der Fläche zugleich Tangentialebene ist: $\sigma' + \lambda \tau$, und es ist zu zeigen, dafs λ so bestimmt werden kann, dafs diese Ebene die Normale enthält; d. h. also es mufs die Gleichung

$$(x' + \mu \sigma_1')(\sigma_1' + \lambda \sigma_1 t) + \ldots (\sigma_4 + \lambda \sigma_4 t) = 0$$

für jeden Wert des μ erfüllt werden.

Weil x' auf der Fläche liegt, ist $x' \sigma_1' + \ldots \sigma_4$ gleich Null; weil $s_1' \sigma_1'(a) + \ldots = 0$, d. h. weil x' auf der Tangente liegt, ist der Faktor eines λ nämlich $x' \sigma_1 t + \ldots \sigma_4 t = 0$ und die einzige Bedingung, welche zu erfüllen ist, lautet:

$$\sigma_1'(\sigma_1' + \lambda \sigma_1 t) + \sigma_2'(\sigma_2' + \lambda \sigma_2 t) + \sigma_3'(\sigma_3' + \lambda \sigma_3 t) = 0,$$

und sie giebt für λ

$$\lambda = \frac{-(\sigma'^2_1 + \sigma'^2_2 + \sigma'^2_3)}{\sigma_1' \sigma_1(t) + \sigma_2' \sigma_2(t) + \sigma_3' \sigma_3(t)}$$

hiermit ist auch zugleich der Pol gefunden.

Scheinbar einfacher ist es, von der Gleichung der zu untersuchenden Ebene auszugehen; sie heifst

$$(x - x')\, a' + (y - y')\, b' + (z - z')\, c',$$

wo a' b' c' die Richtungskosinus der konjugierten Haupttangente sind.

Aus Aufgabe 20 folgt ohne weiteres, dafs die Punkte, in denen die Haupttangenten sich normal schneiden, auf der Kugel von Monge liegen.

Aufgabe 21. Ort der Schnittpunkte dreier Tangenten, welche ein rechtwinkliges Dreikant bilden.

Der Tangentenkegel war $P^2(s\, s') - G(s)\, G(s') = 0$ und bezogen auf die Spitze als Anfangspunkt $P^2(r\, s') - G(r)\, G(s') = 0$ wo $r \{ r_1, r_2, r_3, 0$; $K = \Sigma r_i r_k (\sigma_i' \sigma_k' - a_{ik} G(s')) = \Sigma r_i r_k a_{ik}$ wo i und k die Werte 1 bis 3 durchlaufen. Soll der Kegel

ein Dreikant wie verlangt enthalten, so kann man diese drei Kanten als Achsen ansehen, dann wird $k \{ \Sigma \varrho_i \varrho_k b_{ik}$. Da nun alle drei Achsen auf dem Kegel liegen sollen, so mufs k für $y = 0$, $z = 0$ verschwinden, also $b_{11} = 0$, desgl. $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$. Die Summe $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ bleibt aber bei einer Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems unverändert. Wenn wir also die Achsen rechtwinklig annehmen, ist die Bedingung $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - G(s)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0$. Der Ort ist also ein Quadrik, der sich, wenn $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ ist, auf einen Kegel reduziert.

Aufgabe 22. Ein Kegel, der ein orthogonales Dreikant enthält, enthält deren unendlich viele. Dreht man das eine Dreikant so, dafs die x-Achse als x'-Achse auf dem Kegel bleibt, so mufs im neuen System b_{11} gleich 0 sein, also $b_{22} + b_{33} = 0$, d. h. aber die x'-Ebene schneidet den Kegel in dem Geradenpaar $y^2 + 2cyz - 1 = 0$, d. h. aber in zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen (und von denen jede auf der x'-Achse senkrecht steht), ein solcher Kegel heifst gleichseitig.

Aufgabe 23. Ein gleichseitiger Kegel wird von jeder Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten. Man kann die Form $2a_{12}xy + \ldots = 0$ zu Grunde legen und bekommt als Schnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 24. Die Haupttangenten sind die Hauptstrahlen einer Involution in ihrem Schnittpunkt, deren Strahlenpaare die reziproken Polaren in diesem Punkte sind.

Der Satz ist eine Folge der Gleichung 9, sobald man durch die Haupttangenten und ein Paar reziproker Tangenten entweder ein Ebenenbüschel oder eine Punktreihe legt.

Aufgabe 25. Wenn ein einziges Paar Haupttangenten auf einer Fläche F^2 reell ist, so existieren sie in jedem Punkt.

Die Funktion K(s), welche die Discriminante der quadratischen Gleichung $\varphi(a, b, c) = 0$ von Aufgabe 14 ist, ist für keinen Punkt der Fläche 0, kann also auf der Fläche das Zeichen nicht wechseln.

Aufgabe 26. Die Haupttangenten und die betreffenden Sätze geometrisch abzuleiten.

Wenn g und γ zwei sich in S auf der Fläche schneidende reziproke Polaren, also Tangenten sind, so ist die Ebene $(g\gamma)$ die Tangentialebene in S. Zieht man in dieser Ebene eine beliebige Gerade aufserhalb S, so wird sie g und γ in A und α und die Fläche $G = 0$ in B und C schneiden. Die Linien BS und CS sind dann Tangenten, und da sie aufser dem Berührungspunkt S noch die Punkte B bezw. C mit der Fläche gemeinsam, so liegen sie ganz auf der Fläche, es sind die Haupttangenten. Die Existenz der Haupttangenten, reell oder imaginär, folgt schon daraus, dafs die Tangentialebene wie jede Ebene den Quadrik in einem Kegelschnitt schneidet und dieser im Berührungspunkt einen Doppelpunkt hat, also in 2 Gerade zerfällt.

Die Haupttangenten SB und SC sind sich selbst reziproke Polaren, denn die Polarebene jedes Punktes auf SB geht durch SB. Da die Punkte $A\alpha BC$ auf einer Geraden n liegen und $S\alpha$ in der Polarebene von A, so sind nach dem Satz in Aufgabe 11 § 4 die vier Punkte $A\alpha BC$ vier harmonische Punkte, ihre Polarebenen schneiden sich in einer Geraden ν und bilden ein harmonisches System, und n und ν sind reziproke Polaren. Die Gerade ν ist keine Tangente, weil n keine Tangente ist, sie schneidet die Fläche also aufser in S noch in S′, dann sind S′C und S′B Haupttangenten [Tangenten, weil sie in der Polarebene eines Flächenpunktes liegen und durch den Pol gehen; ganz in der Fläche, weil sie aufser dem Berührungspunkt S′ noch einen Flächenpunkt C bezw. B enthalten], und wir haben die Lösung der

Aufgabe 27. In einem Punkt S der Fläche die Haupttangenten zu konstruieren.

Man verbindet S mit einem anderen Flächenpunkt S′, konstruiert in S und S′ die Tangentialebenen, indem man durch S und S′ zwei Schnittebenen legt und an die entstehenden Kegelschnitte in S und S′ die Tangenten zieht. Die Tangentialebenen schneiden sich in CB, welche die Fläche in B und C schneidet, so sind SB und SC die Haupttangenten in S (S′B und S′C in S′).

Wenn die Fläche gezeichnet vorliegt, schneidet schon jede Tangentialebene von selbst die Haupttangenten aus.

Aufgabe 28. Die Schnittpunkte aller Geraden

einer Tangentialebene mit der Fläche liegen auf den Haupttangenten des Berührungspunktes.

Ein Kegelschnitt kann nicht in mehr als zwei Gerade zerfallen, es giebt also in jedem Punkt nur zwei Haupttangenten.

Aufgabe 29. Den Satz sub Aufgabe 14 geometrisch abzuleiten.

Gesetzt, in A gäbe es nur eine Haupttangente g, legt man durch g und einen beliebigen Punkt P der Fläche eine Ebene, so zerfällt der Schnittkegelschnitt in g und h; legt man durch h und A eine Ebene, so zerfällt der Schnitt in h und eine zweite Gerade durch A. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn jede Gerade h mit g in Einer Ebene liegt, bezw. wenn alle Geraden h g im selben Punkte schneiden.

Aufgabe 30. Die Tangentialebene eines Kegels berührt den Kegel längs einer Kante.

Aufgabe 31. Den Satz sub Aufgabe 25 geometrisch zu beweisen.

Durch jeden Punkt S einer Haupttangente g giebt es, wie eben gezeigt, noch eine. Legt man durch g und einen beliebigen Punkt S′ der Fläche eine Ebene, so schneidet sie aus der Fläche einen Kegelschnitt aus, der g als Bestandteil enthält, und also eine zweite Gerade durch S′, es existiert also in jedem Punkt S′ die eine Haupttangente, also auch die zweite. Die erste durch S′ gehende schneidet g, die zweite mufs dann kreuzen, weil sonst der Schnitt in drei Geraden zerfallen würde und das kann er nicht. Also:

Durch jeden Punkt eines geradlinigen Quadrik gehen zwei Gerade, welche zwei Scharen bilden, so dafs jede Gerade der einen Schar jede Gerade der andern schneidet, während sich zwei Gerade derselben Schar kreuzen.

Aufgabe 30. *Die Form G eines geradlinigen Quadriks zu bestimmen.*

Sei $g\{u, v$, wo $u = 0$ und $v = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen durch g sind, eine Gerade der Fläche und h eine zweite, welche g nicht schneidet, $\{u', v'$; so dafs also u, v, u', v' nicht gleichzeitig verschwinden. Es mufs $G = 0$ sein, sobald u und v gleichzeitig verschwinden, desgleichen, wenn u' und v' verschwinden, also

$$G = u v' - v u' = 0.$$

Die Form G ändert ihre Valenz nicht, wenn man 0 in der Form $\lambda u' v' - \lambda u' v'$ addiert und geht dadurch über in

$$(u + \lambda u') v' - u' (v + \lambda v'),$$

woraus man ersieht, dafs G verschwindet, wenn gleichzeitig $u + \lambda u' = 0$; $v + \lambda v' = 0$. Diese Gleichungen stellen zwei projektiv auf einander bezogene Ebenenbüschel dar, damit ist wieder der Satz bewiesen:

Die Regelfläche F^2 ist der Ort der Schnitte konjugierter Ebenen zweier projektiver Ebenenbüschel.

Man sieht sofort, dafs zwei Schnittgeraden der beiden Ebenenbüschel sich nicht schneiden können, denn wenn gleichzeitig

$$u + \lambda u' = 0, \quad v + \lambda v' = 0$$
$$u + \mu u' = 0, \quad v + \mu v' = 0,$$

so müfsten gleichzeitig $u, u', v, v' = 0$ sein, d. h. g und h sich schneiden. G hätte dann in diesem Punkte einen Doppelpunkt, wäre also uneigentlich.

Aufgabe 31. Dieselbe Regelfläche G ist noch der Ort der Schnitte eines zweiten Systems projektiver Ebenenbüschel.

Man kann zu $G = u v' - v u'$ auch $\lambda' v v' - \lambda' v v'$ addieren und erhält:

$$G \{ (u + \lambda' v) v' - (u' + \lambda' v') v.$$

Es liegt also auf der Fläche noch eine zweite Schar Gerader, die entsprechenden Schnitte der projektiven Büschel $u + \lambda' v = 0$; $u' + \lambda' v' = 0$.

Für eine solche Schnittgerade bestehen diese beiden Gleichungen, und es giebt auf ihr einen Punkt, in dem sie von einer Ebene des ersten Büschels getroffen wird, für den also z. B. $u + \lambda u' = 0$; dann ist für diesen Punkt $u = - \lambda u'$; $- \lambda u' + \lambda' v = 0$; $\lambda u' + \lambda \lambda' v' = 0$, also $\lambda' (v + \lambda v') = 0$, $v + \lambda v' = 0$, d. h. aber

Wenn drei der Gleichungen der erzeugenden Ebenen erfüllt sind, so ist es die vierte von selbst, oder:

Jede Gerade der einen Schar wird von jeder der anderen geschnitten.

Da jede Gerade ihre eigene Tangente, so mufs

die Ebene durch zwei sich schneidende Geraden die Tangentialebene im Schnittpunkt sein.

Aufgabe 31. Zwei Ebenen drehen sich um zwei feste Geraden als Achsen; den Ort der Schnittgeraden derjenigen Paare zu bestimmen, welche auf einander senkrecht stehen.

Die Geraden seien durch ihre Strahlenkoordinaten a, A und a′, A′ bestimmt. Geometrisch ist ohne weiteres klar, dafs, wenn sie sich schneiden, der gesuchte Ort ein Kegel ist, da dann alle Ortsgeraden durch den Schnittpunkt gehen. Auch kann keine Ebene durch die Spitze mehr als zwei Gerade ausschneiden, da der Aufsenwinkel gröfser als jeder innere ist, somit ist dieser Kegel vom zweiten Gerade. Ebenso ist geometrisch klar, dafs die Projektionen auf die durch die beiden Kreuzenden bestimmten Ebenen zum Ort gehören.

Seien u, v zwei Ebenen von $g \} v$ und u', v' zwei Ebenen von $g' \} u', v'$, alsdann ist jede der Ebenen durch $g \} u + \lambda v$ und jede der Ebenen durch $g' \} u' + \lambda' v'$. Sind die Koordinaten rechtwinklig, so ist die Bedingung des Senkrechtstehens, wenn o_1, p_1, q_1 resp. o_2, p_2, q_2 die Koordinaten von u und v sind, und o_1' etc. die von u' und v':

$$(o_1 + \lambda o_2)(o_1' + \lambda' o_2') + \ldots = 0$$

und
$$\lambda = \frac{o_1 x + p_1 y + q_1 z - 1}{o_2 x + p_2 y + q_2 z - 1}.$$

Aus der Symmetrie ergiebt sich

$$(y [o_1 p_2] + z [o_1 q_2] - (o_1 - o_2))(y [o_1' p_2'] \ldots) \ldots = 0$$

und wenn man sich erinnert (aus § 13), dafs $[o_1 p_2] = c$; $o_1 - o_2 = A$, so erhält man

$$\alpha) \quad (y c - z b - A)(y c' - z b' - A') + \ldots = 0.$$

Setzt man $a a' + b b' + c c' = n$, so ergiebt sich

$$\beta) \quad x^2 (n - a a') - \ldots - y z (c b' + b' c)$$
$$+ x (c B' + c' B - b C' - b' C) \ldots + A A' + B B' + C C' = 0.$$

Nimmt man als Nullpunkt die Mitte des Abstandes und als x- und z-Achse die Halbierungslinien der Winkel der Geraden, so hat man, wenn φ der spitze Winkel und l der halbe Abstand

$$a = \cos\frac{\varphi}{2},\ \ b = 0,\ \ c = -\sin\frac{\varphi}{2};\ \ a' = \cos\frac{\varphi}{2},$$

$$b' = 0,\ c' = \sin\frac{\varphi}{2};$$

$$A = -l\sin\frac{\varphi}{2},\ B = 0,\ C = -l\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$A' = -l\sin\frac{\varphi}{2},\ B' = 0,\ C' = l\cos\frac{\varphi}{2}$$

und hieraus

$$\gamma)\quad -x^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + y^2\cos\varphi + z^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - l^2\cos\varphi = 0$$

als Gleichung des gesuchten Orts, der einschaliges Hyperboloid heifst.

Aufgabe 32. Der Nullpunkt ist das Centrum der Fläche.

Aufgabe 33. Bringe die Gleichung γ) in die Form $uv' - vu' = G = 0$, d. h. bestimme die projektiven Büschel und die Scharen von Geraden auf der Fläche.

Aufgabe 33a. Dieselbe Aufgabe in Betreff β).

Aufgabe 34. Bestimme die Scharen von Geraden, welche auf der Fläche (Aufgabe 25 § 1) liegen, welche der Ort der Punkte konstanten Abstandsverhältnisses von zwei Geraden g und h war.

Sei das Verhältnis δ und die Koordinaten wie in Aufgabe 31 gewählt, so sind die Gleichungen von g und h: $y = \varepsilon b$; $z\cos\frac{\varphi}{2} - x\varepsilon\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, wo $\varepsilon = 0$ die Abstände

$$(y-l)^2 + \left(z\cos\frac{\varphi}{2} - x\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

und

$$(y+l)^2 + \left(z\cos\frac{\varphi}{2} + x\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 35. Jede der beiden Tangentialebenen durch g (bezw. h) an diese Fläche steht auf sich selbst senkrecht.

Die Gleichung der Fläche wird

$$s_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + s_2^2 + s_3^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2s_1s_3\nu\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$+ 2s_2s_4l\nu + l^2s_4^2 = 0,$$

wo $\nu = \frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}$ ist. Die Gleichung der Tangential-(Polar-) Ebene ist

$$s_1 \sin\frac{\varphi}{2}\left(x\sin\frac{\varphi}{2} + z\nu\cos\frac{\varphi}{2}\right) + s_2(y + c\nu)$$

$$+ s_3\cos\frac{\varphi}{2}\left(x\nu\cos\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2}\right) + s_4 c(\nu y + c) = 0,$$

wo x, y, z, 1 die Koordinaten des Berührungspunktes (Pol).

Die Bedingung, durch g zu gehen, $\varrho(s_2 - c s_4) - \tau\left(s_3 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} s_1\right) = 0$ giebt

$$\alpha)\quad x\sin\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2}\nu = -\lambda;\quad x\nu\sin\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2} = \lambda;$$

ferner $y = -c$; hieraus $-x\sin\frac{\varphi}{2} = z\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\lambda}{1-\nu}$, und die Gleichung der Fläche in der Form $s_1\sigma_1 + \ldots = 0$ $= x\sin\frac{\varphi}{2}\left(x\sin\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2}\nu\right) + \ldots$ giebt

$$\beta)\qquad \lambda^2 + c^2(1-\nu)^2 = 0,$$

und da die Berührungsebene

$$-s_1\sin\frac{\varphi}{2}\lambda + s_3\cos\frac{\varphi}{2}\lambda + s_2 c(\nu - 1) + s_4 c^2(1-\nu) = 0,$$

so ergiebt sich

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2}\lambda\right)^2 + \left(\cos\frac{\varphi}{2}\lambda\right)^2 + c^2(1-\nu)^2 = 0,$$

oder vereinfacht:

$$x i\sin\frac{\varphi}{2} + z i\cos\frac{\varphi}{2} - y + c$$

und
$$i^2\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + 1 = 0,$$

also ist die Ebene imaginär und tangential an dem Kreis im Unendlichen, den wir § 21 als absolute Kurve gefunden haben und ihre eigene Normale liegt in ihr.

Aufgabe 36. Die Geraden g und h sind reziproke Polaren.

Die Rechnung der Aufgabe 35 gilt mit Ausnahme von Gleichung β) für jede durch g gelegte Ebene und giebt für den Pol $y = -c$ und, da $\lambda + - \lambda = 0$, $1 - \nu$ sicher nicht $0 : z \cos \frac{\varphi}{2} + x \sin \frac{\varphi}{2} = 0$, d. h. aber die Pole liegen auf h.

Aufgabe 37. Je zwei konjugierte Ebenen durch g oder h stehen auf einander senkrecht.

Wir haben für jede Ebenen durch g

$$-s_1 \sin \frac{\varphi}{2} \lambda + s_3 \cos \frac{\varphi}{2} \lambda - s_2\, c(1 - \nu) + s_4\, c^2 (1 - \nu) = 0$$

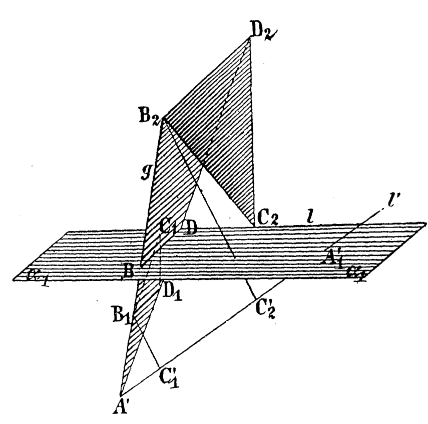


Fig. 5.

und bestimmen wir λ', so dafs die zweite Ebene durch den Pol x, y, z, 1 der ersten geht, so ergiebt sich sofort $\lambda \lambda' + c^2 (1 - \nu)^2 = 0$.

Von diesem Satz, der eigentlich ein Satz der elementaren Stereometrie, hat Milinowski 1878 den folgenden elementaren Beweis gegeben.

Es seien l und l' zwei windschiefe Gerade, α und α_1 zwei aufeinander senkrechte Ebenen durch l, welche l' in A' und A_1' schneiden; es sei g eine beliebige Gerade durch A', welche α_1 in B trifft und auf ihr seien B_1 und B_2 zwei solche Punkte, dafs ihre Abstände von l und l' im Verhältnisse m : m' stehen, so ist zu zeigen, dafs A' B durch B_1 und B_2 harmonisch getrennt sind. Zu dem Zweck fällen

wir (Fig. 5) BD; $B_1 D_1$; $B_2 D_2$ senkrecht auf die Ebene α, dann liegt BD in der Ebene α_1 und D auf l; die drei Punkte $D D_1 D_2$ liegen auf einer durch A' gehenden Geraden. Wir fällen ferner $D_1 C_1$ und $D_2 C_2$ senkrecht auf l; und ziehen $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$, so stehen auch diese auf l senkrecht. Endlich fällen wir noch $B_1 C_1'$ und $B_2 C_2'$ senkrecht auf l'. Dann ist $B_1 C_1' : B_1 C_1 = B_2 C_2' : B_2 C_2 = m' : m$, also $B_1 C_1' : B_2 C_2' = B_1 C_1 : B_2 C_2$; weiter $B_1 C_1' : B_2 C_2' = B_1 A' : B_2 A' = B_1 D_1 : B_2 D_2$, also $B_1 C_1 : B_2 C_2 = B_1 D_1 : B_2 D_2$. Da $\sphericalangle B_1 D_1 C_1 = B_2 D_2 C_2 = 90^0$, so ist $\Delta B_1 D_1 C_1 \sim B_2 D_2 C_2$ und $C_1 D_1 : C_2 D_2 = B_1 D_1 : B_2 D_2$. Es war $B_1 D_1 : B_2 D_2 = B_1 A' : B_2 A' = D_1 A' : D_2 A'$. Es ist aber $C_1 D_1 : C_2 D_2 = D D_1 : D D_2$, also $D_1 A' : D_2 A' = D_1 D : D_2 D$, d. h. A' und D durch D_1 und D_2 harmonisch getrennt, also auch A' und B durch B_1 und B_2. Eine Involution wie die hier auftretende heifst circulare.

Aufgabe 38. Den Satz sub Aufgabe 35 mittelst der Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten zu beweisen.

Aufgabe 39. Die Gleichung der Fläche durch Verschiebung des Anfangspunktes in der y-Achse und Drehung des Achsenkreuzes der x- und z-Achse auf die Form γ der Aufgabe 31 zu bringen.

Wir haben den geradlinigen Quadrik als Schnittort projektiver Ebenenbüschel aufgefafst; damit ist, da wir von Punkt- zu Ebenenkoordinaten beliebig übergehen können, zugleich bewiesen, dafs wir ihn auch auffassen können als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf projektiven Punktreihen.

Aufgabe 40. Je zwei Erzeugende der einen Schar eines geradlinigen Quadriks werden von 4 Erzeugenden der andern Schar in Punkten desselben Doppelverhältnisses geschnitten.

Die 4 Gerade sind Gerade eines Ebenenbüschels, und die beiden Reihen entstehen dadurch, dafs zwei Gerade die Ebenen eines Büschels schneiden; da aber alle Gerade die Ebenen eines Büschels in Punkten von konstantem Doppelverhältnis der Ebenen schneiden, so ist der Satz bewiesen und damit zugleich der Satz: Der Ort der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektiven Punktreihen ist eine Fläche zweiter Ordnung.

Aufgabe 41. Die Fläche zu untersuchen, welche entsteht, wenn die geraden Linien des einen Systems die des andern nach konstantem Verhältnis teilen (in ähnlichen Reihen schneiden) vergl. S. S. IX Teil 1. Nach dem vorigen Satz beschränken wir uns auf zwei Gerade der einen Schar, also kreuzende, dann ist auf jeder von ihnen eine Teilung aufgetragen von zwei entsprechenden Punkten aus und die Endpunkte entsprechender Teile sind verbunden. Ist die erste Verbindungsgerade die y-Achse und die Parallele zur einen Gerade durch die Mitte O derselben die

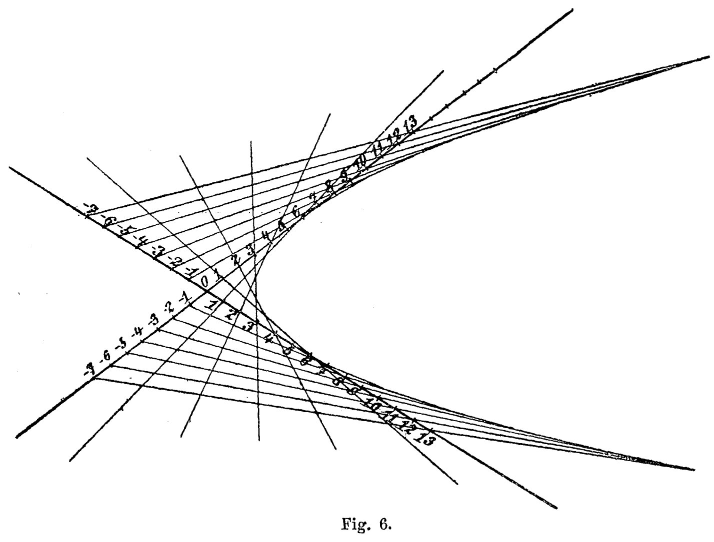


Fig. 6.

x-Achse und die Parallele zur zweiten die z-Achse, so sind die Koordinaten entsprechender Punkte (Fig. 6)

$$y = l,\ x = n\,m \text{ und } y = -l,\ z = -n\,m.$$

Die Gleichungen ihrer Verbindungsgeraden sind:

$$2\,l\,x - n\,m\,y = n\,m\,c;\ \frac{x}{m} + \frac{z}{m'} = n = \frac{2\,l\,x}{m\,(c + y)},$$

da, wie man sich leicht überzeugt, $\alpha_{33} = 0$ ist, so ist diese Fläche ein Paraboloid; es heifst geradliniges oder hyperbolisches Paraboloid. Es ist verhältnismäfsig nicht schwierig, ein Fadenmodell von diesen Flächen herzustellen.

Aufgabe 42. Auf zwei Geraden sind drei Paar entsprechende Punkte gegeben; zu einem beliebigen vierten auf einer von ihnen den entsprechenden auf der andern zu konstruieren.

(Fig. 7.) Man verschiebt die Gerade 1 2 3 als Ganzes (starr), so dafs 1 mit I zusammenfällt; dann schneiden sich

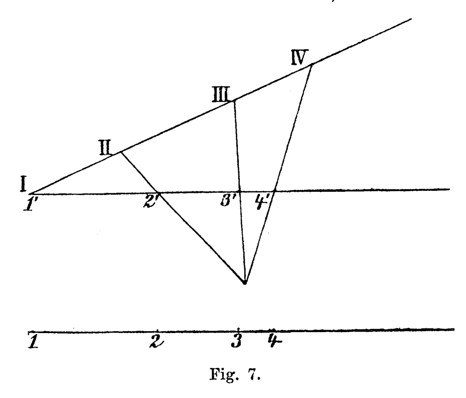


Fig. 7.

II 2′ und III 3′ in S, es trifft dann IV S die Gerade 1′ 2′ 3′ in 4′, man trägt 3′ 4′ auf 1 2 3 von 3 aus ab, dann ist 4 der IV entsprechende Punkt.

Aufgabe 43. Zu drei Paar gegebener Ebenen zweier projektiver Büschel ein viertes zu konstruieren.

Nach Aufgabe 42 ist es nicht mehr schwer, ein Fadenmodell eines einschaligen Hyperboloids herzustellen.

II. Abschnitt.

Die Reyeschen Achsen.

§ 7. Die Reyeschen Achsen.

Wir fanden im § 4 Aufgabe 9, dafs, wenn g eine durch zwei Punkte s′ und s″ gegebene Gerade war, ihre reziproke Polare γ den Gleichungen genügte:

$$\frac{x - x_1}{[\sigma_2' \sigma_3'']} = \frac{y - y_1}{[\sigma_3' \sigma_1'']} = \frac{z - z_1}{[\sigma_1' \sigma_2'']}$$

und der Punkt 1 ein beliebiger Punkt von γ ist, also auch der Punkt B, des § 12 S. S. IX Teil 1 sein kann, für den

$$x_1 = [\sigma_3' \sigma_4''] : [\sigma_1' \sigma_3'']; \; y_1 = 0; \; z_1 = (\sigma_1'' \sigma_4'] : [\sigma_1' \sigma_3''].$$

Sollen g und γ auf einander senkrecht stehen, so ist die Bedingung § 12 S. S. IX Teil 1 Aufgabe 8 in Linienkoordinaten gegeben

$$[\sigma_2' \sigma_3''] \varphi' ([s_1' s_4'']) + \ldots = 0$$

und für rechtwinkliges Achsensystem

$$1) \qquad [s_1' s_4''] [\sigma_2' \sigma_3''] + \ldots = 0.$$

Die Geraden g und γ besitzen stets eine gemeinsame Senkrechte t und Ebene (t, γ) steht auf g, Ebene (t, g) auf γ senkrecht, der Pol von (t, γ) liegt auf g, der Pol von (t, g) auf γ, somit kann man auch sagen:

Eine Gerade g, welche auf ihrer reziproken Polaren senkrecht steht, ist das vom Pol auf die Polare gefällte Lot; sie heifst nach Reye: Achse und der Komplex der Achsen einer F^2 heifst nach Reye: Achsenkomplex. Da zu jeder Ebene in Bezug auf eine

gegebene eigentliche F^2 ein Pol gehört, und es in diesem Punkt stets eine Senkrechte auf der Polaren giebt, so enthält der Achsenkomplex eine ∞^3 fache Menge von Geraden. Liegt der Pol in der Fläche, so liegt er in seiner Polaren und die Achse, deren Pol er ist, steht auf der Tangentialebene im Berührungspunkte senkrecht, es ist die Normale.

Aufgabe 1. Wenn der Pol gegeben ist, $P\{s'$, die Gleichung der zu ihm gehörigen Achse aufzustellen.

Da die Richtungskosinus der Polarebene den Zahlen σ' etc. proportional sind, so sind die Richtungsfaktoren der Achse den Zahlen $\varphi'(\sigma')$ etc. proportional, für rechtwinkliges System haben wir

$$2)\qquad \frac{x - x'}{\sigma_1{}'} = \frac{y - y'}{\sigma_2{}'} = \frac{z - z'}{\sigma_3{}'},$$

d. h.: Die Gleichungen der Normalen und der Achsen sind von derselben Form und unterscheiden sich nur dadurch, dafs der Pol der Normalen auf der Fläche liegt.

Die Normalen bilden innerhalb des Achsenkomplexes selbst einen Strahlenkomplex von ∞^2 facher Menge.

In der Gleichung der Achse für einen gegebenen Pol kommt (auch bei beliebigen Koordinatensystem) a_{44} nicht vor, $G(s) - s_4^2\, G(s') : s_4'^2 = 0$ ist eine Fläche F'^2, welche sich von F_2 nur durch den Wert des a_{44} unterscheidet und auf der der Punkt s' liegt, und 2) ist die Gleichung der Normalen von F'^2 in $P\{s'$, also:

Der Achsenkomplex ist identisch mit dem Komplex der Normalen der mit der Fläche F^2 homothetischen Schar.

(F^2 selbst mitgerechnet).

Als Komplex der Normalen ist der Achsenkomplex gelegentlich von Ampère bemerkt worden, das Verdienst, seine Bedeutung erkannt zu haben, gebührt ausschliefslich Herrn Reye.

Aufgabe 2. Wenn die Normalen in zwei Flächenpunkten A und B sich schneiden, so ist AB eine Achse.

(Die reziproke Polare von AB ist die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen in A und B und steht als solche auf der Ebene der beiden Normalen senkrecht.)

Da die Reyeschen Achsen eine Mannigfaltigkeit dritter Stufe bilden, während die Gesamtheit aller Geraden des Raumes von vierter Stufe ist, so muſs zwischen den Konstanten einer Geraden eine Bedingung bestehen, damit sie Achse sei. Diese Bedingung ist in Gleichung 1 gegeben.

Aufgabe 3. Die Bedingung, daſs eine Gerade g Reyesche Achse einer F^2 sei, in den Strahlenkoordinaten von g auszudrücken.

Sei $g \{ a, A$; es muſs, wenn der Punkt A § 12 S. S. IX Teil 1, in dem g die x-Ebene schneidet, $\{ \xi'$ etc. ist, wo $\xi' = 0$, $\eta' = - C : a$; $\zeta' = B : a$ ist, das System $\frac{x - \xi'}{a} = \frac{y - \eta'}{b} = \frac{z - \zeta'}{c}$ mit dem für rechtwinklige Koordinaten geltenden System $\frac{x - x'}{\sigma_1'} = \frac{y - y'}{\sigma_2'} = \frac{z - z'}{\sigma_3'}$ identisch sein.

Man erhält: $\sigma_1' : \sigma_2' : \sigma_3' = a : b : c$; ferner ist $x' b - y' a = C$ und $x' c - z' a = - B$.

Ist $\alpha_{44} \neq 0$, existiert also (vgl. § 5) ein Centrum M, so kann man dies, welches $\{ \sigma_1 = 0, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = 0$ ist, zum Nullpunkt wählen, dadurch verschwinden $a_{14}\ a_{24}\ a_{34}$ und es ändert sich nur a_{44}, das aber in unserer Gleichung gar nicht vorkommt. Bezeichnen wir die quadratische homogene Form in $\Gamma(\sigma)$ der drei Variabeln s_1, s_2, s_3 mit $K(s)$ und die zugehörigen σ mit τ, so erhält man für die centralen Quadriks die Bedingung

$$3) \qquad \tau_1 (a, b, c) A + \tau_2 B + \tau_3 C = 0.$$

Aufgabe 4. Die Bedingung 3, geometrisch zu interpretieren. Da A, B, C den Richtungskosinus der Ebene (M, g) proportional sind und τ_1, τ_2, τ_3, 0 die Koordinaten des Pols der Ebene, welche durch M senkrecht zu g gelegt ist, so haben wir den Satz:

Wenn g eine Achse ist, liegt der Pol der zur Geraden g senkrechten Ebene durch die Mitte M in der Ebene (M g) und v. v.,

d. h. dieser Satz kann als Definition des Achsenkomplexes dienen. Die Bedingung 3) läfst noch eine andere geometrische Auslegung zu, sie zeigt den Satz (wie schon 1)

Der Achsenkomplex ist ein Linien- (Strahlen-) Komplex zweiten Grades.

Aufgabe 5. Die Bedingung 3) direkt aus der Gleichung 1) herzuleiten.

Es ändert sich 3) durch Vertauschung von a mit A nicht, und der Symmetrie wegen, genügt es, die Rechnung für das erste Glied in 1) durchzuführen. Man sieht daraus, dafs die Änderung für die Paraboloïde geringfügig ist.

Aufgabe 6. Auf der Geraden g, welche Achse ist, den Pol zu bestimmen.

Unser System in Aufgabe 3 giebt

$$P\left\{\frac{\lambda \tau_1 (a, b, c)}{\alpha_{44}}\right.,$$

wo

$$\frac{-\lambda}{\alpha_{44}} = \frac{C}{a \tau_2 - b \tau_1} = \frac{B}{\tau_1 c - \tau_3 a} = \frac{A}{b \tau_3 - c \tau_2}.$$

Auch dies System kann als Definition benutzt werden. Man sieht, für eine Achse sind die grofsen Strahlenkoordinaten durch die kleinen bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. In den Koordinaten der Achsen 2) kommt a_{44} ebensowenig vor, wie in denen des Pols.

Aufgabe 6. Die Koordinaten von P hängen nur von den der Schar gemeinsamen Konstanten ab.

Da die Pole aufser dem gemeinsamen Faktor λ nur von den kleinen (Richtungs-)koordinaten der Geraden g abhängen, so sind die Quotienten der Koordinaten der Pole auf parallelen Achsen konstant, während die grofsen Linienkoordinaten aller parallelen Achsen den Zahlen $a \tau_2 - b \tau_1$ etc. proportional sind, also:

Aufgabe 7. Die Pole aller parallelen Achsen liegen auf Einer Geraden durch M, auf Einem Durchmesser.

Aufgabe 8. Alle parallelen Achsen liegen in einer Ebene durch M, einer Durchmesserebene.

Wir fanden § 12 die Gleichung einer Ebene durch zwei parallele Geraden a b c, A, B, C, A′ B′ C′ als

$$x(A - A') + y(B - B') + z(C - C') - (AC' - CA') : b = 0.$$

Da $A' = \varrho A$, $B' = \varrho B$, $C' = \varrho C$ und $AC' - CA' = 0$, so fällt der Faktor $(1 - \varrho)$ und damit ϱ aus der Gleichung der Ebene heraus, und sie wird

$$4)\quad Ax + By + Cz = x(b\tau_3 - c\tau_2) + y(c\tau_1 - a\tau_3) + z(a\tau_2 - b\tau_1) = 0.$$

Aufgabe 9. Die Gleichungen der reziproken Polare einer Achse.

Wir wählen als Punkt 1 den Pol, dann ist $\sigma_1' = \lambda a$, und als Punkt 2 den unendlich fernen Punkt a, b, c, 0, dann ist $\sigma_1'' = \sigma_1(a, b, c)$ und $\sigma_4'' = 0$, wir erhalten:

$$5)\quad \frac{x + \dfrac{a_{44}\,\sigma_3(a, b\,c)}{\lambda(a\sigma_3 - c\sigma_1)}}{b\sigma_3 - c\sigma_2} = \frac{y}{c\sigma_1 - a\sigma_3} = \frac{z - \dfrac{a_{44}\,\sigma_1}{\lambda(a\sigma_3 - c\sigma_1)}}{a\sigma_2 - b\sigma_1}$$

Aufgabe 10. Die reziproken Polaren einer Schar paralleler Achsen bilden selbst wieder eine Schar paralleler Achsen.

Aufgabe 11. Die Ebene der zur Achsenrichtung a, b, c reziproken Achsen zu bestimmen.

Wir finden für die grofsen Strahlenkoordinaten

$$\frac{a_{44}}{\lambda}\,\sigma_1(a, b, c);\ \frac{a_{44}}{\lambda}\,\sigma_2;\ \frac{a_{44}}{\lambda}\,\sigma_3$$

und daraus für ihre Ebene nach 4)

$$6)\qquad x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = 0,$$

d. h.

Die Ebene der zur Achsenrichtung a b c reziproken Achsen ist die Polarebene des in der Richtung a b c unendlich fernen Punktes.

Aufgabe 12. Die Schar der mit F^2 homothetischen Flächen besitzt nicht nur dieselben Achsen, sondern auch auf diesen Achsen dieselben Pole.

Aufgabe 13. Die Polarebenen Eines Punktes in Bezug auf die ganze Schar bilden eine Schar paralleler Ebenen.

Aufgabe 14. Den Pol auf der reziproken Polaren einer gegebenen Achse zu bestimmen.

Benennen wir $a_{44} : \lambda$ mit u, so haben wir nach 5)

$$u\sigma_1 = z'b' - y'c';\ \ u\sigma_2 = x'c' - z'a';\ \ u\sigma_3 = y'a' - x'b'$$

und nach Aufgabe 3:

$$b' \sigma_1 (x, y, z) - a' \sigma_2 (x) = 0.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, $a_{12}\ a_{13}\ a_{23}$ seien 0 (wir werden gleich sehen, daſs es stets möglich ist, die Achsen so um M zu drehen, daſs diese Gröſsen verschwinden); dann ist $\sigma_1 = a\, a_{11}$; $b' = a\, c\, (a_{11} - a_{33})$ und man erhält, da aus der letzten Gleichung z verschwindet, ganz direkt (in Bezug auf dies System, das Hauptachsensystem):

$$7)\qquad x_1 = \frac{a_{44}}{\lambda} \cdot \frac{a_{33}\ a_{22}}{a\,(a_{11} - a_{22})\,(a_{11} - a_{33})};$$

$$y_1 = \frac{a_{44}}{\lambda}\ \frac{a_{11}\ a_{33}}{b\,(a_{22} - a_{33})\,(a_{22} - a_{11})};\ z_1 = \ldots$$

und damit den merkwürdigen Satz: die Produkte der Koordinaten zweier zusammengehöriger Pole in Bezug auf das Hauptachsensystem sind konstant.

Aufgabe 15. Auf einer durch ihren Pol x′ gegebenen Achse den Fuſspunkt zu finden.

Er sei $\}x$, dann haben wir die Gleichung der Achse

$$\frac{x - x'}{\sigma_1 (x')} = \frac{y - y'}{\sigma_2 (x')} = \frac{z - z'}{\sigma_3 (x')},\ \text{d. h. } x = x' + \lambda\, \sigma_1 \text{ etc.}$$

und die der Polarebene $x\, \sigma_1 (x') + y\, \sigma_2 + z\, \sigma_3 + \sigma_4 = 0$ und erhalten für λ

$$\lambda = \frac{- G (x')}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

Aufgabe 16. Die reziproke Polare einer Geraden durch M.

Für eine Achse durch M wird $\lambda = 0$, wenn es nicht unbestimmt wird. Ist die Achse $\}$ a, b, c, so sind A′, B′, C′ unendlich und diese unendlich ferne Gerade liegt in der Ebene

$$x\, \sigma_1 + y\, \sigma_2 + z\, \sigma_3 = 0,$$

d. h. in der Polarebene des in der Richtung des Durchmessers unendlich fernen Punktes, wie ohne weiteres daraus hervorgeht, daſs die Polare des Centrums, für welches $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, die unendlich ferne Ebene ist. Wir haben den Satz:

Jede unendlich ferne Gerade ist Achse.

Aufgabe 17. Die Gleichung der Polarebene, auf der g senkrecht steht.

$$\lambda(ax + by + cz) + a_{44} = 0.$$

Aufgabe 18. Jede Gerade durch die Spitze des Asymptotenkegels, d. h. durch das Centrum M, ist Achse, deren Pol M ist.

Aufgabe 19. Wann wird λ unbestimmt, d. h. wann giebt es auf der Geraden g unzählig viele Pole?

Im allgemeinen ist P eindeutig bestimmt, nur wenn $\frac{\lambda}{\alpha_{44}}$ von der Form $0:0$ wird, giebt es unzählig viele Pole, also müssen A, B, C verschwinden, d. h. die Gerade durch M gehen, und $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = a : b : c$ sein, setzen wir $\tau_1 = \mu a$, so haben wir das System:

$$\text{p)}\quad \begin{aligned} a(\alpha_{11} - \mu) + b\alpha_{12} + c\alpha_{13} &= 0 \\ a\alpha_{12} + b(\alpha_{22} - \mu) + c\alpha_{23} &= 0 \\ a\alpha_{13} + b\alpha_{23} + c(\alpha_{33} - \mu) &= 0. \end{aligned}$$

Das System, worin die α die aus S. S. VIII bekannte Bedeutung der Faktoren der Koeffizienten der quadratischen homogenen Form dreier Variabeln in der Determinante $D = \alpha_{44}$ haben, läſst sich vereinfachen, wenn wir die Gleichungen der Reihe nach mit a_{11}; a_{12}; a_{13}, dann mit a_{12}; a_{22}; a_{23} etc. multiplizieren und jedesmal addieren, und für $\frac{-D}{\mu}$ die Zahl λ einführen. Man erhält

$$\text{n)}\quad \begin{aligned} a(a_{11} - \lambda) + b a_{12} + c a_{13} &= 0 \\ a a_{12} + b(a_{22} - \lambda) + c a_{23} &= 0 \\ a a_{13} + b a_{23} + c(a_{33} - \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von a, b, c aus diesem System (vgl. S. S. VIII) giebt $-\Delta(\lambda) = 0$ oder

$$8)\qquad \boldsymbol{\lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda\sigma - a = 0,}$$

wo

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33};\ \sigma = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33};\ a = \alpha_{44},$$

d. h. a ist die Determinante der homogenen quadratischen Form dreier Variabeln aus der anal. Geom. der Ebene.

Wir haben damit den Satz:



Eine Centrale F^2 hat im allgemeinen drei Reyesche Achsen, welche unzählig viele Pole tragen.

Diese Achsen gehen durch das Centrum, sie heifsen **Hauptachsen.** Für die Richtungsfaktoren dieser Achsen finden wir

$$5)\quad a : b : c = \beta_{11} : \beta_{12} : \beta_{13} = \beta_{12} : \beta_{22} : \beta_{23} = \beta_{13} : \beta_{23} : \beta_{33} = \sqrt{\beta_{11}} : \sqrt{\beta_{22}} : \sqrt{\beta_{33}},$$

wenn β_{11} etc. dieselbe Verbindungen der Koeffizienten der Variabeln im System n) bezeichnen, die wir, wenn $\lambda = 0$, mit α_{ik} bezeichnet haben; also $\beta_{11} = \alpha_{11} - \lambda(a_{22} + a_{33}) + \lambda^2$; $\beta_{12} = \alpha_{12} + \lambda a_{12}$; $\beta_{13} = \alpha_{13} + \lambda a_{13}$.

Aufgabe 20. Wann wird die reziproke Polare einer Achse unbestimmt?

Die Gleichungen 5 zeigen, dafs dies eintritt, wenn $a : b : c = \sigma_1(a\,b\,c) : \sigma_2 : \sigma_3$, aber diese Gleichungen sind infolge der Äquivalenz der Systeme p) und n) der Aufgabe 19 äquivalent mit dem System $a : b : c = \tau_1 : \tau_2 : \tau_3$, also finden wir die Hauptachsen wieder.

Die Gleichung der reziproken Polare für eine Hauptachse wird die unendlich ferne der Ebene $x\,a + y\,b + z\,c = 0$ (System n), d. h. sie mufs in der Ebene liegen, welche in M auf der betreffenden Hauptachse senkrecht steht.

Aufgabe 21. **Die drei Hauptachsen stehen in M aufeinander senkrecht.**

Die Gleichungen der drei Hauptachsen, welche der ganzen Schar homothetischer Flächen gemeinsam sind, haben die einfache Form

$$9)\quad \frac{x}{\beta_{13}} = \frac{y}{\beta_{23}} = \frac{z}{\beta_{33}}.$$

Unterscheiden wir die drei Wurzeln der Gleichung 8) durch Marken und die betreffenden β durch Striche, so haben wir z. B. das Produkt

$$\beta_{13}'\,\beta_{13}'' + \beta_{23}'\,\beta_{23}'' + \beta_{33}'\,\beta_{33}'' = p_1$$

zu untersuchen. Da (vgl. Pund, Algebra) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = s$ und $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = a$, so findet man mit geringer Arbeit, weil $\alpha_{13}^2 = \alpha_{11}\,\alpha_{33} - a\,a_{22}$ und $a = a_{12}\,\alpha_{12} + a_{13}\,\alpha_{13} + a_{11}\,\alpha_{11}$ etc.,

$$10)\quad p_1 = (\lambda_1\,\alpha_{33} + a)\,\Delta(\lambda_1),$$

also da $\Delta(\lambda_1) = 0$ ist, $p_1 = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 22. Die Ebene durch je zwei Achsen ist die Polarebene zum unendlich fernen Punkt der dritten.

Folgt aus der eben bewiesenen Gleichung $p = 0$ direkt, da für die Hauptachsen $a = \lambda\, \sigma_1 (a, b, c)$ etc.

Die Ebenen durch je zwei Achsen heifsen *Hauptebenen*. *Die drei Hauptebenen bilden ein Poldreikant.*

Aufgabe 23. Die Hauptebenen sind Symmetrieebenen jeder Fläche der Schar.

Denn jede zur dritten Achse parallele Sehne, welche auf der betreffenden Hauptebene senkrecht steht, wird in dieser Hauptebene halbiert, da der harmonisch konjugierte im Unendlichen liegt.

Die drei Gröfsen λ sind Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, sie sind entweder alle drei reell oder eine ist reell, die beiden andern sind konjugierte komplexe Zahlen; es gilt der Satz:

Die drei Hauptachsen einer centralen Schar F^2 sind stets reell.

Wären z. B. λ_1 und λ_2 komplex-konjugiert, so wären β_{ik}' und β_{ik}'' auch komplex-konjugiert, also geht p_3 über in:

$$(u' + i u'')(u' - i u'') + (v' + i v'')(v' - i v'') + (w' + i w'')(w' - i w''),$$

das ist: $u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 + w'^2 + w''^2$ und, wie Aufgabe 21 bewiesen, gleich 0, also müfsten alle Quadrate und damit alle u, v, w, d. h. alle β verschwinden.

Es kann vorkommen, dafs zwei der λ, z. B. λ_1 und λ_2 einander gleich sind, dann ist evident, dafs man das Achsenkreuz der zwei Achsen um die dritte drehen kann, das zeigen aber auch die Formeln; p_3 ist stets gleich 0 und geht über in $\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{33}^2 = 0$, es müssen also die drei β und damit die Richtungsfaktoren der beiden Achsen unbestimmt werden; aber weil $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, müssen sie stets aufeinander senkrecht stehen, sowie auf der zum ungleichen λ gehörenden Achse.

Jede Ebene durch die ungleiche Achse ist dann eine Symmetrieebene, die Flächen sind Rotationsflächen, der Asymptotenkegel ist ein Rotationskegel, entstanden durch Rotation eines Winkels um seine Halbierungslinie.

Die Bedingungen ergeben sich aus β_{13} etc. $= 0$ als

$$11)\qquad \frac{a_{13}}{\alpha_{13}} = \frac{a_{23}}{\alpha_{23}} = \frac{a_{12}}{\alpha_{12}}.$$

Sind alle drei λ gleich, so ist jede Gerade durch die Spitze des Asymptotenkegels bezw. das Centrum Rotationsachse, das System wird zu einer Schar konzentrischer Kugeln, der Kegel zum imaginären Kugelkegel.

---

§ 8. Die Achsen durch einen Punkt.

Es sei $S\{\xi$ ein fester Punkt, und durch ihn gehe eine Achse a, A, wir haben dann in 3) für a, b, c, zn setzen: $(x - \xi)$ etc. und für A „$\eta z - \zeta y$" bezw. nur A, B, C zu ersetzen durch $\eta c - \zeta b$ etc. Die Gleichung 3) stellt unter der Bedingung ξ etc. konstant, einen Kegel dar, dessen Spitze S ist, denn es ist eine Fläche zweiten Grades, auf der $S\{\xi$ liegt, und die, wenn sie für ξ, a, b, c erfüllt ist, auch für $x = \xi + p\,a$ etc., d. h. für jeden Punkt einer durch S gehender Achse erfüllt ist.

Aufgabe 1. Auf diesem Kegel liegen die drei Parallelen durch S zu den Hauptachsen.

Wir brauchen die Gleichung 3) $(\eta c - \zeta b)\,\tau_1\,(a\,b\,c) + (\zeta a - \xi c)\,\tau_2 + (\xi b - \eta a)\,\tau_3 = 0$ nur in der Form $\eta\,(c\,\tau_1 - a\,\tau_3) + \ldots = 0$ zu schreiben.

Aufgabe 2. Auf diesem Kegel liegt der Strahl SM.

Da auf dem Kegel sicher der Strahl liegt, für den S selbst der Pol ist, d. h. also das von S auf die Polarebene von S gefällte Lot, so ist der Kegel völlig bestimmt, da jede Ebene ihn in fünf bestimmten Punkten und somit in einem konstruierbaren Kegelschnitt schneidet, bezw. da rechnerisch die fünf Konstanten durch die fünf Geraden bestimmt sind.

Der Achsenkegel ist also stets ein gleichseitiger Kegel.

Aufgabe 3. Wo liegen die Pole aller zum Achsenkegel S gehörenden Achsen?

Wir haben für die Pole die Gleichung 1) d. h.

$$1)\qquad \frac{x' - \xi}{\sigma(x')} = \frac{y' - \eta}{\sigma(y')} = \frac{z' - \zeta}{\sigma(z')}.$$

Die Gleichungen in Aufgabe 6 § 7 bestätigen rechnerisch, dafs die Pole auf dem Kegel 3) liegen.

Die Gleichungen 1) stellen, wenn man die Striche wegläfst zu je zweien drei Quadriks dar, die alle durch den Punkt S gehen, und die alle drei geradlinig sind, auf dem ersten liegt die Gerade $x = \xi$, $y = \eta$, d. h. die Parallele durch S zur z-Achse; ferner die Gerade, in der die Ebenen $\sigma(x) = 0$ und $\sigma(y) = 0$ sich schneiden. Wenn $\alpha_{13} = 0$ und $\alpha_{23} = 0$, so liegt die Gerade $x = \xi$, $y = \eta$ zugleich auf dem Kegel 3) und auf der Fläche $F(z) \{ (x - \xi)\sigma_1 - (y - \eta)\sigma_2 = 0$.

Aufgabe 3. Eine Gerade zu bestimmen, welche der Fläche F (z) und dem Kegel 3) gemeinsam ist.

Die Aufgabe, eine Gerade zu bestimmen, welche zwei Flächen zweiten Grades gemeinsam ist, ist im allgemeinen unlösbar; soll die Gerade existieren, so mufs sie durch die Spitze des Kegels gehen. Wir setzen $x - \xi = p\,u$, $y - \eta = p\,v$, $z - \zeta = p\,w$, und dann müssen die Gleichungen F (z) und die des Kegels für jeden Wert des p erfüllt sein. F (z) giebt:

$$\text{a)} \qquad u\,\sigma_2(\xi\,\eta\,\zeta) - v\,\sigma_1(\xi) = 0$$

$$\text{b)} \qquad u\,\sigma_2(u\,v\,w) - v\,\sigma_1(u) = 0,$$

also $u = q\,\sigma_1(\xi)$, $v = q\,\sigma_2(\xi)$, setzen wir $w = q\,w'$, so haben wir zur Bestimmung von q die Gleichung b) und zu der von w' die Gleichung des Kegels in der Form:

$$\text{c)} \quad (\eta\,w' - \zeta\,\sigma_2)\,\tau_1(\sigma_1\,\sigma_2\,w') + (\xi\,\sigma_1 - \xi\,w')\,\tau_2(\sigma_1\,\sigma_2\,w') + (\xi\,\sigma_2 - \eta\,\sigma_1)\,\tau_3 = 0.$$

Diese Gleichung hat die selbstverständliche Lösung $w' = \sigma_3$, d. h. also die Achse, für die S selbst der Pol, wie auch rechnerisch dadurch folgt, dafs $\tau_1(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3) \{ \sigma_1$. Für diese Lösung versagt aber die Gleichung b), und es bleibt daher nur die andere Lösung der quadratischen Gleichung c, übrig, die man mit geringer Mühe erhält, wenn man $c(w') - c(\sigma_3)$ bildet und durch $w' - \sigma_3$ dividiert:

$$w'(\eta\,\alpha_{13} - \xi\,\alpha_{23}) + \alpha_{33}(\xi\,\sigma_2(\xi) - \eta\,\sigma_1(\xi)) + \zeta\,f_1(\xi\,\eta\,\zeta) = 0$$

wo

$$f_1 = \zeta(a_{23}\,\alpha_{13} + a_{13}\,\alpha_{23}) + \xi(\alpha_{23}\,a_{11} - \alpha_{13}\,a_{12}) + \eta(a_{12}\,\alpha_{23} - \alpha_{13}\,a_{22}) = \alpha_{23}\,\sigma_1(\xi) - \alpha_{13}\,\sigma_2(\zeta)$$

also:

$$\text{d)} \qquad w' (\eta \alpha_{12} - \xi \alpha_{23}) + \alpha_{33} (\xi \sigma_2 - \eta \sigma_1) + \zeta (\alpha_{23} \sigma_1 - \alpha_{13} \sigma_2) = 0.$$

Die gerade Linie $\frac{x - \xi}{\sigma_1 (\xi)} = \frac{y - \eta}{\sigma_2 (\xi)} = \frac{z - \zeta}{w'}$ ist dem Kegel und der Fläche F (z) gemeinsam, aber sie liegt nicht auf der Fläche F (y) bezw. F (x), daher reduziert sich der Ort der Pole auf die sonstigen gemeinsamen Punkte; diese liegen im allgemeinen auf einer Raumkurve vierten Grades, die im vorliegenden Falle in die Gerade und eine Raumkurve dritten Grades zerfällt, d. h. in eine Kurve, welche von einer Ebene in nicht mehr als drei Punkten geschnitten wird. Also:

Die Pole des Achsenkegels eines beliebigen Punktes liegen auf einer Raumkurve dritten Grades.

Dieser Satz, sowie die meisten andern Sätze über die Achsen aus diesem Abschnitt finden sich in einer mir erst jetzt bekannt gewordenen Arbeit von Herrn *Emil Schilke*, Zeitschrift f. Math. u. Ph. 1874, welche aus dem *Reyeschen Seminar* hervorgegangen ist.

Aufgabe 4. Wie viel Normalen lassen sich von einem Punkte S an eine centrale F^2 legen?

Die Normalen gehören zu den Achsen durch S, ihre Fuſspunkte sind Pole; da die nicht zum Ort der Pole gehörigen Gerade die F^2 in zwei Punkten schneidet, so giebt es im allgemeinen sechs Normalen.

Aufgabe 5. Was wird aus der Geraden, wenn Punkt S auf einer Achse?

Dann können wir $\sigma_1 \{ \xi$, $\sigma_2 \{ \eta$ und $w' \{ \zeta$ setzen.

Was wird aus dem Achsenkegel, wenn seine Spitze in einer der (drei) Symmetrieebenen liegt?

Wir beweisen zunächst den Satz:

Aufgabe 6. *Jede Gerade einer Symmetrieebene ist Achse.*

Für eine Gerade der Symmetrieebene haben wir $A' = a$, $B' = b$, $C' = c$, wenn a, b, c den Richtungskosinus der auf ihr senkrechten Achse proportional; (§ 12), ferner $a' a + b' b + c' c = 0$.

Die Bedingung 3) ist $\tau\,(a'\ b'\ c')\,a + \ldots = a'\,\tau_1\,(a\ b\ c) + \ldots$ und $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = a : b : c$, also 3) ist hier $\{ a'a + b'b + c'c \}\ 0$.

Damit ist bewiesen:

Für die Punkte einer der Symmetrieebenen zerfällt der Achsenkegel in zwei Ebenen, deren eine die Symmetrieebene ist.

Die andere ist leicht zu finden durch den Satz in Aufgabe 4 § 6 und den Satz

Aufgabe 7. Jede Parallele zu einer der drei Hauptachsen ist selbst Achse.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem eben angeführten Satz, aber wir wollen ihn durch Rechnung beweisen.

Für eine Parallele zur Hauptachse a, b, c ändern sich nur die grofsen Strahlenkoordinaten. A ist $\zeta\,b - \eta\,c$, etc., die Bedingung 3) ist $\xi\,(b\,\tau_1 - c\,\tau_2) + \eta\,(\quad) + \ldots = 0$, d. h. sie ist identisch erfüllt.

Die beiden Ebenen, in die der Achsenkegel zerfällt, sind also normal zu einander.

Aufgabe 8. Den Satz in Aufgabe 6 ohne Rechnung zu beweisen.

Es sei S der Punkt, dessen Achsenkomplex wir betrachten; es geht durch ihn die Achse, für welche S selbst der Pol ist, die Polarebene von S sei σ, es geht durch S eine zweite Achse g' (z. B die parallele zu einer der Hauptachsen) mit dem Pole S' und der Polarebene σ', dann ist die Schnittlinie γ' von σ und σ' die reziproke Polare von g' und γ' steht auf der Ebene ε der Geraden g und g' senkrecht. Würde nun in dieser Ebene ε noch eine dritte Achse durch S liegen, etwa g'', so müfste γ'' auch auf der Ebene ε senkrecht stehen. Es müssen sich aber $\gamma, \gamma', \gamma''$ im Pol von ε schneiden, dieser Pol P also im Unendlichen liegen. Dann ist jede Gerade h in ε eine Achse, denn ihre reziproke mufs durch P gehen, also der Linie γ parallel sein, d. h. auf der Ebene ε und somit auch auf h senkrecht stehen. Verbindet man dann P mit einem Punkt N dieser Ebene, und schneidet diese Gerade die Fläche F^2 in B und C, so werden B und C durch N und den unendlich fernen Pol harmonisch getrennt, d. h. N ist die Mitte von BC, welche als Parallele zu γ auf ε senk-

recht steht, d. h. aber die Ebene ε ist eine Symmetrieebene der Fläche.

Damit ist auch zugleich rein geometrisch bewiesen, dafs der Achsenkegel ein Kegel zweiten Grades ist, der im Falle, dafs seine Spitze auf einer Symmetrieebene liegt, in zwei Ebenen ausartet.

Dieser Beweis gilt zugleich für die Paraboloïde.

Aufgabe 9. Durch Rechnung nachzuweisen, dafs das Centrum auf dem Achsenkegel jedes Punkts $P\{\xi$ liegt.

Wir haben $a^2(\zeta a_{12} - \eta a_{13}) + \ldots bc((\eta a_{12} - \zeta a_{13}) + \xi(a_{33} - a_{22})) + \ldots = 0$, und dies verschwindet für $a = f\xi$, $b = f\eta$, $c = f\zeta$.

---

§ 9. Der Achsenkomplex der Paraboloïde.

Für die Paraboloïde ist $\alpha_{44} = 0$, ihr Centrum rückt ins Unendliche; anders ausgedrückt: die Ebenen $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, schneiden sich in parallelen Geraden. Die Richtung, in der das Centrum ins Unendliche rückt, ist aber bestimmt, da wir für die Punkte der Linie die Gleichungen haben: $x_\infty : y_\infty : z_\infty = \alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34}$, und nicht alle 4 „$\alpha_{i4}$“ zugleich verschwinden dürfen, weil sonst $A = 0$, die Fläche uneigentlich. Es bleiben nun zunächst die Gleichungen 1 und 2 des Abschnitts unverändert. Verlegen wir den Ursprung in einen beliebigen Punkt p der Linie $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, so erhalten wir, wenn $s_1 = t_1 p_4 + t_4 p_1 \ldots$, $s_4 = 0 p_4 + t_4 p_4$ gesetzt wird

$$G(s) = G(t_1, t_2, t_3, 0)\, p_4^2 + t_4^2\, G(p) + 2\, t_3\, t_4\, \sigma_3(p)\, p_4 = 0.$$

Aufgabe 1. Die Form G(t) stellt eine uneigentliche Fläche dar.

(Vgl. § 2.) Die Fläche ist ein Kegel und da $\alpha_{44} = 0$, so liegt die Spitze im Unendlichen, d. h. die Fläche ist ein Cylinder, nach Analogie nennen wir ihn (bezw. vermehrt um $t_4^2\, G(p)$, wodurch keine wesentliche Änderung herbeigeführt wird) den Asymptotencylinder der Paraboloïde. Da $s_4 = 0$, so verhält sich

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} = s_1 : s_2 : s_3 = \overline{\alpha}_{13} : \overline{\alpha}_{23} : \overline{\alpha}_{33},$$

wo sich die $\overline{\alpha}$ auf die Form $G(t, 0)$ beziehen. Diese



Richtung $\alpha_{13} : \alpha_{23} : \alpha_{33}$ nennen wir die Richtung der Achse des Cylinders bezw. des Paraboloïds.

Aufgabe 2. Wird eine Koordinatenachse in die Richtung der Cylinderachse gedreht, so verschwindet die betreffende Koordinate.

(Die Rechnung siehe folgenden Abschnitt.)

Aufgabe 3. Welche Form nimmt die Bedingung 3) an für die Paraboloïde?

$$A \tau_1 (a\, b\, c) + B \tau_2 + C \tau_3 + (a \bar{\sigma}_2 - b \bar{\sigma}_1)\, a_{34}' = 0,$$

wo sich die τ und σ nur auf den Cylinder beziehen, $a_{34}' = \frac{\sigma_3 (p)}{p_4}$.

Aufgabe 4. Wenn $a : b : c = \bar{\sigma}_1 : \bar{\sigma}_2 : \bar{\sigma}_3$, ist diese Gleichung identisch erfüllt.

Aufgabe 5. Wenn auf einer Achse ein unendlich ferner Pol liegt, so mufs $a : b : c = \bar{\sigma}_1 : \bar{\sigma}_2 : \bar{\sigma}_3 = \tau_1 : \tau_2 : \tau_3$ sein.

Wir erhalten also dasselbe Gleichungssystem wie in Aufgabe 19 § 7, und dieselben Resultate, nur wird eine Wurzel der Hauptachsengleichung 0.

Aufgabe 6. Die Richtung dieser Hauptachse ist bestimmt durch $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}$, d. h. es ist die Richtung der Cylinderachse.

Aufgabe 7. Zu beweisen, dafs, da $\alpha_{44} = 0$ ist, $\bar{\alpha}_{13} : \bar{\alpha}_{23} : \bar{\alpha}_{33} = \bar{\alpha}_{11} : \bar{\alpha}_{12} : \bar{\alpha}_{13} = \bar{\alpha}_{12} : \bar{\alpha}_{22} : \bar{\alpha}_{23}$.

Die Reihenfolge der drei Gleichungen $\sigma_1 (t)$, $\sigma_2 (t)$, $\sigma_3 (t)$ ist willkürlich.

III. Abschnitt.

Die uneigentlichen Flächen zweiten Grades.

§ 10. Der Kegel.

Für den Kegel war $A = 0$, und die vier Gleichungen $\sigma_i = 0$ hatten eine endliche Lösung $s \} s'$ und somit unendlich viele. Verlegt man den Nullpunkt in den Doppelpunkt oder die Spitze S, d. h. setzt man $\frac{s_1}{s_4}$ (d. i. x) $= \frac{r_1}{r_4} + \frac{s_1'}{s_4'}$ etc., oder

$$s_i = r_i s_4' + s_i' r_4 : (i = 1, 2, 3)$$

und

$$s_4 = 0\, s_4' + s_4' r_4;$$

also

$$G(s) = s_4'^2 G(r_1; r_2; r_3; 0) + 2 r_4 s_4' P(r, s') + r_4^2 G(s'),$$

so verschwinden $G(s')$ und $P(r, s')$ und

$$1) \qquad G(s) \} G(r_1, r_2, r_3, 0),$$

d. h.:

Verlegt man den Nullpunkt in die Spitze des Kegels, so verschwindet die Koordinate s_4 aus der Gleichung, es bleiben nur die Glieder zweiter Dimension in den Punktkoordinaten mit unveränderten Koeffizienten.

Statt $G(s)$ schreiben wir

$$1a) \quad K(s) = a_{11} s_1^2 + 2 a_{12} s_1 s_2 + 2 a_{13} s_1 s_3 + a_{22} s_2^2 + 2 a_{23} s_2 s_3 + a_{33} s_3^2 = 0,$$

oder kurz $K(s) = \Sigma a_{ik} s_i s_k$, wo i und k nicht mehr den Wert 4 annehmen.

Aufgabe 1. Liegt ein Punkt P auf dem Kegel, so liegt die ganze Gerade SP auf dem Kegel. (Fig. 8.)

Die Gleichung K(s) ist identisch mit der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte in homogenen Koordinaten, man sieht, wie eng der Kegel mit seinen Schnitten zusammenhängt, die Rechnung bleibt dieselbe, nur die Interpretation ändert sich.

Da K(s) eine quadratische Form ist, wie G(s) nur statt von vier Variabeln von drei, so bleiben alle Sätze bestehen, die auf den Eigenschaften der quadratischen Form beruhen, insbesondere die ganze Lehre von Pol und Polare, welche sich somit zugleich auf die Kegelschnitte überträgt. Diese Übertragung hätte man allerdings schon dadurch leisten können, dafs man eine Ebene durch einen Punkt P als Pol legt, welche die F^2 schneidet. Auch der II. Abschnitt bleibt im wesentlichen ungeändert.

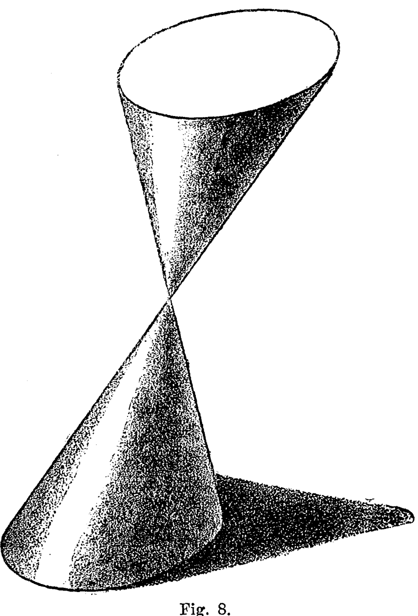


Fig. 8.

Aufgabe 2. Die Gleichung der Polarebene bezw. der Tangentialebene eines Punktes für den Kegel aufzustellen.

Aufgabe 3. Alle Polarebenen eines Kegels gehen durch die Spitze.

Die Spitze ist zugleich das Centrum, eine Gerade durch sie Durchmesser.

Der Durchmesser heifst auch Kante.

Die Menge der Polar-Ebenen des Kegels ist nur eine ∞^2 fache (zweifach unendliche, d. h. $\infty . \infty$ fache), die Menge der Pole ist eine ∞^3 fache. Aufschlufs giebt der Satz:

Aufgabe 4. Alle Punkte, welche auf demselben Durchmesser liegen, haben dieselbe Polarebene.

Aufgabe 4a. Alle Punkte des Kegels auf derselben Kante haben dieselbe Tangentialebene.

Aufgabe 5. Die Gleichung des Kegels in Ebenenkoordinaten, die reziproke Form $\varkappa$.

Die Auflösung der Gleichungen nach den s ist nur gestattet, wenn $\alpha_{44} \neq 0$, wir erhalten dann

$$\varkappa(\sigma) = \sigma_1 (\alpha_{11} \sigma_1 + \alpha_{12} \sigma_2 + \alpha_{13} \sigma_3) + \dots$$

Man sieht, daſs $\varkappa(\sigma) = 0$ wieder ein Doppelelement enthält, nämlich die Lösung $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, welche eine beliebige durch die Spitze gehende Ebene darstellt.

Die Gleichung $\varkappa(\sigma) = 0$ stellt also nicht bloſs den Komplex der Tangentialebenen des Kegels dar, sondern auch jede durch die Spitze gehende Ebene, sie ist also nicht die Polargleichung des Kegels, sondern die Gleichung der Spitze, und der Kegel hat, streng genommen, keine Gleichung in Ebenenkoordinaten.

Abstrahiert man von der Lösung 0, 0, 0, 0, so ist $\varkappa(\sigma) = 0$ die von den Tangentialebenen umhüllte Fläche, d. i. der Kegel. Daſs dem Kegel die Gleichung in Ebenenkoordinaten fehlt, wird noch deutlicher durch

Aufgabe 6. Die Gleichung des Kegels bei beliebigem Nullpunkt in Ebenenkoordinaten darzustellen.

$$2) \quad (s_1' \sigma_1 + s_2' \sigma_2 + s_3' \sigma_3 + s_4' \sigma_4)^2 = s_4'^2 \,.\, 0$$

und dies ist die Gleichung der Spitze (als Doppelpunkt betrachtet). Von Hesse ist diese φ^2 als Grenzfläche zweiter Ordnung bezeichnet worden.

Aufgabe 7. Bei beliebigem Ursprung zu zeigen, daſs, wenn P auf dem Kegel liegt, die Gerade SP ganz auf ihm liegt. $G(s' + \lambda s) =$ etc.

Aufgabe 8. Unter allen Ebenen einer solchen Grenzfläche giebt es eine ausgezeichnete, für deren Koordinaten alle vier Ableitungen von 2) zugleich verschwinden.

(Wenn $A = 0$ ist, so ist auch die Determinante der α gleich 0.)

Diese Koordinaten seien σ_i', die Ebene σ'.

Aufgabe 9. Jede Ebene, welche durch die Schnittgerade von σ' und einer Ebene der φ^2 geht, gehört selbst zur φ^2.

2) sei gleich $\varkappa(\sigma)$, dann ist $\varkappa(\sigma' + \lambda\sigma)$, weil $\varkappa(\sigma')$ und $\varkappa(\sigma)$ und $\pi(\sigma', \sigma)$ verschwinden, gleich 0.

Aufgabe 10. Die Gleichung 2 stellt eine einfach unendliche Schar von Ebenenbüscheln dar, deren Träger in der ausgezeichneten Ebene σ' liegen.

Aufgabe 11. Die Träger umhüllen einen Kegelschnitt.

Durch eine beliebige Gerade gehen an die φ^2 zwei Tangentialebenen, also von einem beliebigen Punkt P auf σ' an die Kurve zwei Tangenten. (Damit ist dann zugleich 2) die Gleichung der Kegelschnitte in Ebenenkoordinaten.)

Aufgabe 12. Zu einer Kante a, b, c die senkrechte zu bestimmen.

Wenn die gesuchte Kante $\{$ u, v, w, das System rechtwinklig, die Spitze Ursprung, so haben wir das System

$$K(a, b, c) = 0; \; K(u, v, w) = 0; \; a u + b v + c w = 0.$$

Es ergiebt im allgemeinen zwei Kanten a_1 etc. und a_2 und wir haben

$$a_{1,2} = -(a_{13} b^2 - a_{12} b c - a_{23} a b + a_{22} a c) \\ \pm \sqrt{-b^2 \varkappa(a, b, c)},$$

wo $\varkappa$ die zu K adjungierte Form $a^2 \alpha_{11} + \ldots$ bezeichnet.

$$b_{12} = -(a_{23} a^2 - a_{12} a c - a_{13} b c + b c a_{11}) \pm \sqrt{-a^2 \varkappa}$$
$$c_{1,2} = K(b, -a, 0).$$

Nach den bekannten Sätzen über die Produkte der Wurzeln quadratischer Gleichungen ist

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a^2(a_{33} + a_{22}) + b^2(a_{11} + a_{33}) \\ + c^2(a_{11} + a_{22}) - 2 a_{12} a b - 2 a_{13} a c - 2 a_{23} b c$$

und mit Benutzung von $K(a, b, c) = 0$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

Aufgabe 13. Wenn die beiden Kanten, welche auf Einer Kante senkrecht stehen, selbst aufeinander senkrecht stehen, so stehen die beiden Senkrechten zu jeder Kante auf einander senkrecht, der Kegel ist gleichseitig.

Die Bedingung $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ ist, da a, b, c nicht zugleich verschwinden, nötig und hinreichend und von a, b, c unabhängig.

Aufgabe 14. Den Winkel, den die beiden auf einer Kante Senkrechten miteinander einschliefsen, zu bestimmen.

Aufgabe 15. Die Gleichung eines Kegels aufzustellen, dessen Kanten auf den Tangentialebenen eines gegebenen Kegels senkrecht stehen, und der dieselbe Spitze hat.

Sei eine solche Kante $\{ a_1$, so ist die Gleichung der auf ihr senkrechten Ebene $x a_1 + \ldots = 0$, und damit sie eine Tangentialebene sei, mufs $\varkappa(a_1; b_1; c_1) = 0$ sein, und da $a_1 \} x$ etc., wo x den laufenden Punkt der Kante a_1 markiert, so ist die gesuchte Gleichung

$$x^2 \alpha_{11} + \ldots = 0.$$

Der Kegel heifst supplementär.

Aufgabe 15a. Wenn K_2 supplementär zu K_1, so ist K_1 supplementär zu K_2.

Aufgabe 16. Interpretiere die Bedingung $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$.

(Unzählig viel Systeme von drei Tangentialebenen, welche zu je zweien aufeinander senkrecht stehen.)

Aufgabe 17. Die Gleichung eines Kegels aufzustellen, dessen Spitze im Nullpunkt und der durch den Schnitt einer gegebenen Ebene und eines gegebenen Quadriks geht.

Die Ebene sei $ux + vy + wz + t = 0 = \varepsilon$, der Quadrik $K(x, y, z) + E(x, y, z) = 0$, wo K die Form des Asymptotenkegels ist, dann ist die Gleichung des gesuchten Kegels

$$-t\, K(x, y, z) + E(x, y, z)(ux + vy + wz) = 0,$$

denn dies ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze in 0, und sie ist erfüllt, wenn gleichzeitig $K + E = 0$ und $\varepsilon = 0$ ist.

Aufgabe 18. Kegel, dessen Spitze $\{ \xi, \eta, \zeta$ und der durch den Kegelschnitt $\varphi(s_1, s_2, s_3) = 0$ geht.

Da jede Linie, welche die Spitze mit einem Punkte der Kurve verbindet, ganz auf dem Kegel liegt, so haben wir, wenn wir die Ebene der Kurve als y-Ebene annehmen,

$x = x_1 + \lambda \xi$ und $\lambda = \dfrac{y}{\eta - y}$, also für den Kegel

$$\varphi(x\eta - y\xi;\ z\eta - y\zeta;\ \eta - y) = 0.$$

Aufgabe 19. Ort der Spitzen der Kegel, welche durch den Kegelschnitt $\varphi(x, z, 1)$ und drei Punkte A, B, C gehen.



Der Quadrik $\varphi(A\eta - B\xi; \ldots) = 0$.

Aufgabe 20. Ort der Spitzen der gleichseitigen Kegel durch $\varphi = 0$.

Der Quadrik: $c_{11}\xi^2 + c_{22}\zeta^2 + \eta^2(c_{11} + c_{22}) + \ldots = 0$, wo die c die Konstanten von φ bedeuten.

---

§ 11. Der zerfallende Kegel.

Die Form $K(s_1\ s_2\ s_3) = 0$ bezw. $K(x\ y\ z) = 0$ ist identisch mit der homogenen Form G (s) der Kegelschnitte S. S. VIII § 28; die Bedingung, daſs sie sich in zwei homogene Faktoren ersten Grades spalten läſst, ist dort angegeben, sie ist $\alpha_{44} = 0$. Wir werden, um Verwechselung mit der Form G (s) von vier Variabeln zu vermeiden, die Koeffizienten von a_{ik} in der Determinante von K (s) d. i. α_{44} fortab mit b_{ik} bezeichnen. Auch die Zerfällung ist l. c. bereits gegeben.

Wenn nicht alle drei a_{kk} zugleich verschwinden, und z. B. $a_{11} \neq 0$, so ist:

$$3)\ K(s) = \frac{1}{a_{11}}[a_{11}s_1 + (a_{12} + i\,w_3)s_2 + (a_{13} - i\,w_2)s_3]$$
$$[a_{11}s_1 + (a_{12} - i\,w_3)s_2 + (a_{13} + i\,w_2)s_3],$$

wo $w_k = \sqrt{b_{kk}}$ ist und i als Faktor gleich $\sqrt{-1}$.

Die einzelnen Faktoren von K (s) stellen, da wir $s_1 = x$ etc. deuten können, Ebenen dar; ε_1 und ε_2.

Aufgabe 1. Die Schnittgerade von ε_1 und ε_2 zu bestimmen. Die Schnittgerade geht durch die Spitze, d. i. den Ursprung, also sind A, B, C gleich 0 und für die kleinen Koordinaten erhalten wir aus den beiden homogenen Gleichungen in bekannter Weise

$$a : b : c = (a_{12}w_2 + a_{13}w_3) : -a_{11}w_2 : -a_{11}w_3.$$

Aufgabe 2. Geometrisch ist klar, daſs jeder Punkt der Schnittgeraden ein Doppelpunkt, es soll dies durch Rechnung bewiesen werden. Der Kegel besitzt eine ganze Gerade voll Doppelpunkten, bezw. eine Doppelgerade. Denn $\alpha_{44} = 0$ ist die Bedingung, daſs die drei Gleichungen $\sigma_1(s)$; $\sigma_2(s)$; $\sigma_3(s)$ miteinander verträglich, und da $\sigma_4(s)$ identisch 0, so ist jede Lösung dieses Systems ein Doppelpunkt. Sei

a $\{ u_1\, u_2\, u_3$ eine solche, so ist λu ebenfalls Lösung, und da die Spitze S $\{ 0$ ebenfalls eine Lösung, so liegen die Doppelpunkte auf einer Gerade durch die Spitze.

Aus dem System $\sigma_1(u) = 0$ etc. erhalten wir, wenn wir z. B. u_3 aus je zwei Gleichungen eliminieren, und dann u_1

$$4)\qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{b_{13}}{b_{23}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{b_{12}}{b_{22}};$$
$$\frac{u_2}{u_3} = \frac{b_{23}}{b_{33}} = \frac{b_{12}}{b_{13}} = \frac{b_{22}}{b_{32}}$$

und damit

$$5)\qquad u_1^2 : u_2^2 : u_3^2 = b_{11} : b_{22} : b_{33} = w_1^2 : w_2^2 : w_3^2$$
$$u_1 : u_2 : u_3 = b_{11} : b_{12} : b_{13} = b_{12} : b_{22} : b_{23} = b_{13} : b_{23} : b_{33}.$$

Da das System $\sigma_i(u)$ nur die Verhältnisse der u bestimmt, so können wir $u = w$ setzen und damit ist der Satz bewiesen; da aus $\sigma_1(u) = \sigma_1(w) = 0$ folgt $(a_{12}\, w_2 + a_{13}\, w_3) = - a_{11}\, w_1$, also $a : b : c$ (aus Aufgabe 1) $= w_1 : w_2 : w_3$.

Aus den Gleichungen 4 und 5 folgt:

$$6)\ w_1\, w_2 = b_{12};\ w_2\, w_3 = b_{23};\ w_3\, w_1 = b_{31} = (b_{13}).$$

Hinsichtlich der w bemerken wir: 1) wenn eines der w verschwindet, z. B. w_3, so verschwinden mit b_{33} zugleich b_{13} und b_{23}. 2) Das Zeichen der w ist durch das eines von ihnen bestimmt, 3) sobald ein w reell ist, sind es die andern, d. h. alle w^2 sind gleichzeitig > 0 oder < 0, die Zahlen b_{11}; b_{22}; b_{33} haben dasselbe Zeichen.

Aufgabe 3. Wenn die beiden Ebenen des zerfallenden Kegelschnitts imaginär sind, ist die Schnittgerade (die Doppelgerade) doch reell.

Wenn $a_{11} \neq 0$ und $\alpha_{44} = 0$, so zerfällt der Kegel in die beiden Ebenen, deren Gleichungen 3) giebt, diese sind imaginär, wenn w^2 positiv, dann aber geht die Doppelgerade durch die Spitze in der reellen Richtung w. Man kann den Beweis auch ganz direkt aus der Gleichung $\sigma_1(w) = 0$ entnehmen, da für den reellen Punkt $x = \lambda w_1$; $y = \lambda w_2$; $z = \lambda w_3$ beide Faktoren verschwinden.

Aufgabe 4. Wenn alle drei $a_{ii} \neq 0$, kann die Zerfällung nach 3) auf drei verschiedene Arten bewirkt werden, es soll gezeigt werden, dafs sie äquivalent sind.

Aufgabe 5. Wenn $\alpha_{44} = 0$ und $a_{kk} = 0$, die Zerfällung zu bewirken. K reduziert sich auf $a_{12}\,xy + a_{23}\,yz + a_{31}\,zx = 0$ und α_{44} auf $2\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$; ist also $\alpha_{44} = 0$, so mufs einer der drei Koeffizienten a_{ik} z. B a_{13} verschwinden, dann zerlegt sich K in $y\,(a_{12}\,x + a_{13}\,z)$. Der Kegel zerfällt in die y-Ebene und eine Ebene durch die y-Achse.

Aufgabe 6. Wann zerfällt der Kegel in eine Doppelebene?

Wenn zwei der w gleich 0 sind.

Aufgabe 7. Wann zerfällt eine Fläche zweiten Grades in zwei sich schneidende Ebenen?

Sie mufs zunächst einen Kegel darstellen, der seine Spitze im Endlichen hat, d. h. es müssen alle vier σ_i von G (s) für einen Punkt im Endlichen s′ verschwinden, d. h. also zunächst $A = 0$, und da s′ im Endlichen, müssen die Verhältnisse $\frac{s_1'}{s_4'}$ etc. endlich bleiben. Eine analoge Rechnung wie sie in Aufgabe 2 zu den Formeln 5 führt, giebt, wenn $A = 0 : s_1^2 : s_2^2 : s_3^2 : s_4^2 = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \alpha_{44}$. Wenn der Kegel zerfällt ist $\alpha_{44} = 0$, da aber die Spitze im Endlichen, müssen α_{11}, α_{22}, α_{33} ebenfalls 0 sein. Also:

Eine Fläche zweiten Grades zerfällt in zwei sich schneidende Ebenen, wenn $A = 0$, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44} = 0$ ist.

Sind dann noch zwei der w, welche sich auf die Form K beziehen, gleich 0, so fallen die beiden Ebenen zusammen.

Aufgabe 8. Untersuche die Fläche: $0 = 7x^2 + 26xy + 38xz + 15y^2 + 34yz + 15z^2 + 60x + 68y + 76z + 77$.

Resultat $(7x + 5y + 3z + 11)\,(x + 3y + 5z + 7) = 0$.

Aufgabe 9. $x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2 - 12x - 24y - 36z + 36 = 0$.

Aufgabe 10. $x^2 + 34y^2 + 65z^2 - 6xy + 8xz + 46yz = 0$.

Gleichung der Doppelgeraden?

$$\left(\frac{x}{41} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-5}\right).$$

§ 12. Die Transformation auf die Hauptachsen.

Jede Gerade durch die Spitze ist Achse, deren Pol die Spitze ist; liegt auf ihr ein zweiter Pol $\{x$, dann sind alle ihre Punkte Pole, die Gerade ist eine Hauptachse. Ihre Gleichung ist:

$$7) \qquad \frac{x}{\sigma_1(x)} = \frac{y}{\sigma_2(y)} = \frac{z}{\sigma_3(z)},$$

und dies System ist in der That für cx, cy, cz ebenfalls erfüllt.

Es mufs $\sigma_1(x) = \lambda x$ etc. sein und dies giebt zur Bestimmung von λ, vgl. § 6 $\Delta(\lambda) = 0$, wo $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda\sigma - a = 0$, wo $s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$; $\sigma = b_{11} + b_{22} + b_{33}$; $a = \alpha_{44}$ war.

Da $x:y:z = a:b:c$ war (§ 6), so haben wir $x:y:z = \beta_{11}:\beta_{12}:\beta_{13}$ etc. wie in § 6, Aufgabe 19, nur dafs wir statt α_{ik} lieber b_{ik} schreiben, um Verwechselung mit der Determinante von $G(s_1\, s_2\, s_3\, s_4)$ zu vermeiden.

Da die drei Hauptachsen aufeinander senkrecht stehen, so liegt es nahe, die Fläche auf das System dieser drei Achsen, welche zu je zweien Symmetrieebenen waren, zu beziehen; da wir ja bewiesen, dafs sie stets reell.

Aufgabe 1. Den Beweis der Realität der drei Achsen algebraisch zu führen.

Man kann der Gleichung die Form geben:

$$8) \quad \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}\,\lambda + b_{23}} + \frac{a_{23}\, a_{21}}{a_{13}\,\lambda + b_{13}} + \frac{a_{31}\, a_{32}}{a_{12}\,\lambda + b_{12}} - 1 = 0$$

und sieht in dieser Form leicht, dafs diese Funktion von λ zwischen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$ dreimal das Zeichen wechselt.

Wir nehmen an, $K(x\,y\,z) = 0$ sei die Gleichung des Kegels in rechtwinkligen Koordinaten mit der Spitze als Ursprung.

Es war § 18, Teil 1, wenn wir $\cos(x\,\xi) = \gamma_{11}$, $\cos(x\,\eta) = \gamma_{12}$ etc. setzen,

$$x = \gamma_{11}\,\xi + \gamma_{12}\,\eta + \gamma_{13}\,\zeta;\; y = \gamma_{21}\,\xi + \ldots,\; z = \gamma_{31}\,\xi + \ldots$$

und dies System gilt allgemein, wenn nur das alte System als rechtwinklig vorausgesetzt wird, das neue kann beliebig sein.

Wir erhalten:

$$9)\ K(x, y, z) = \xi^2 K(\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}) + \eta^2 K(\gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{32}) + \zeta^2 K(\gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}) + 2\xi\eta P(\gamma_1, \gamma_2) + 2\eta\zeta P(\gamma_2, \gamma_3) + 2\zeta\xi P(\gamma_3, \gamma_1),$$

wo γ_1 bedeutet, dafs wir $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}$ als die Koordinaten eines Punktes γ_1, auf der neuen ξ-Achse im Abstand 1 von 0, ansehen und entsprechend γ_2 und γ_3, und $P(\gamma_1, \gamma_2)$ die Polarform K für die Punkte γ_1 und γ_2 bedeutet etc.

Aus der Gleichung 9) folgt wieder der Satz:

Wählt man ein System konjugierter Durchmesser zu Achsen, so reduziert sich $K(xyz)$ auf die Summe der drei quadratischen Glieder

$$\xi^2 K(\gamma_1) + \eta^2 K(\gamma_2) + \zeta^2 K(\gamma_3) = 0.$$

Aufgabe 2. Aus dieser Gleichung zu beweisen: Jede Diametralebene halbiert alle der konjugierten Richtung parallelen Sehnen.

Da die Hauptachsen (cf. § 28) ebenfalls ein Poldreikant bilden, so wird die Gleichung des Kegels

$$\frac{\xi^2}{n_1^2} K(\beta_{13}^1, \beta_{23}^1, \beta_{33}^1) + \frac{\eta^2}{n_2^2} K(\beta_{13}^{(2)}) + \frac{\zeta^2}{n_3^2} K(\beta_{13}^{(3)}),$$

wo der Exponent des β sich auf die betreffende Wurzel λ bezieht. Es ist nun $K(\beta_{13}^1)$ oder kurz $K_1 = \beta_{13}\sigma_1(\beta^1) + \beta_{23}\sigma_2 + \beta_{33}\sigma_3$, da aber $x : y : z = \beta_{13} : \beta_{23} : \beta_{33}$, so ist, gemäfs dem System $\sigma_1(x) = \lambda x$ etc., $\sigma_1(\beta') = \lambda_1 \beta_{13}$ etc. und somit $K_1 = \lambda_1 n_1^2$ etc. und somit erhalten wir die Hauptform:

$$10)\qquad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0.$$

In der Hauptform der Gleichung des Kegels treten die drei Wurzeln der Hauptachsengleichung $\Delta(\lambda) = 0$ auf und nur diese.

Die Hauptform ist so einfach, dafs man alle bisherigen Resultate aus ihr mühelos ableiten kann, man sieht sofort, dafs, wenn $\lambda_1 = \lambda_3$, alle Schnitte parallel zur Ebene $\eta = 0$ Kreise sind, deren Centren auf der η-Achse liegen, jeder Schnitt durch die y-Achse das Linienpaar $\lambda_2 y^2 + \lambda_1 r^2 = 0$ ausschneidet, also der Kegel Rotationskegel ist. Ebenso ist evident, dafs jede Koordinatenebene, d. h. jeder Hauptschnitt, Symmetrieebene ist.

Für die Tangential- bezw. Polarebene findet man $\lambda_1 \xi \xi' + \lambda_2 \eta \eta' + \lambda_3 \zeta \zeta' = 0$. Soll die Ebene u, v, w, d Tangentialebene sein, so mufs $d = 0$, $\xi' \equiv u \lambda_1^{-1}$ etc. sein, also ist

$$11) \qquad u^2 \lambda_1^{-1} + v^2 \lambda_2^{-1} + w^2 \lambda_3^{-1} = 0.$$

Die Gleichung des Kegels in Ebenenkoordinaten, wenn die Lösung $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ausgeschlossen wird.

Haben alle drei λ gleiches Zeichen, so wird der Kegel imaginär und nur seine Spitze ist reell; dann mufs die Gröfse σ in $\Delta(\lambda)$ § 6 als Summe der Produkte je zweier Wurzeln > 0 sein.

Haben zwei λ das Zeichen $+$ und das dritte das Zeichen $-$ (oder sind zwei $-$ und eins $+$, was gleichbeteudend, da man die Hauptform bezw. die Grundform mit -1 multiplizieren kann) so erhalten wir, wenn wir z. B. $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$; $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$; $\lambda_3 = -\frac{1}{c^2}$ setzen.

$$12) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die Schnitte parallel der Ebene $z = 0$ sind Ellipsen, parallel der y- und x-Ebene Hyperbeln. Die Centren der Schnitte liegen auf der betreffenden Achse, die Asymptoten der hyperbolischen Schnitte sind den beiden durch den zugehörigen Hauptschnitt aus dem Kegel ausgeschnittenen Kanten parallel.

Aufgabe 3. Die Hauptachsen des supplementären Kegels durch die Spitze.

§ 7 Aufgabe 19 giebt aus der Äquivalenz der Systeme p und n, wenn wir die Hauptachsen μ nennen, $\mu = -\alpha_{44} \lambda^{-1}$, und dasselbe Resultat erhalten wir aus der Hauptform 10), da wir diese mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren können.

Aufgabe 4. Die Gleichung eines Kegels ist für rechtwinklige Achsen $x^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \,.\, y z = 0$; Hauptform? Welche Winkel bildet die Achse λ_2 mit den alten Achsen? $(x^2 - y^2 + z^2 = 0)$.

Aufgabe 5. Die Gleichung eines Kegels ist für rechtwinklige Achsen



$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - \frac{8xy}{\sqrt{6}} - \frac{4xz}{\sqrt{3}} + \frac{8yz}{3\sqrt{2}} = 0,$$

wie Aufgabe 4

$$(x^2 - y^2 + 3z^2 = 0).$$

Aufgabe 6. Die Gleichung eines Kegels im System $\lambda = \mu = \nu = 60^0$ ist $x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$; welche Winkel machen seine Hauptachsen mit den Koordinatenachsen?

Wir transformieren zunächst auf ein rechtwinkliges Achsensystem. Die neue (y') Achse sei mit der alten identisch, zur x'-Achse wählen wir die Linie, welche in der y-Ebene den Nebenwinkel von μ halbiert, und die z'-Achse senkrecht auf der x'- und y'-Achse; sie liegt, wie geometrisch ohne weiteres klar, in der Ebene, welche den Winkel μ halbiert, in der auch y bezw. y' liegt. Wir haben dann (vgl. Teil 1):

$$(x'x) = 120^0;\ (x'y) = 90^0;\ (x'z) = 60^0;\ (y'x) = 60^0;$$
$$(y'y) = 0;\ (y'z) = 60^0;$$
$$\cos(z'x) = -\frac{\sqrt{3}}{4};\ \cos(z'y) = 0;\ \cos z'z = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Nach § 18 Teil 1 erhalten wir aus $x + y + z = y' - \frac{\sqrt{3}}{4} z'$ etc. leicht:

$$x = -x' - \frac{\sqrt{3}}{4} z';\ y = y' + \frac{\sqrt{3}}{4} z';\ z = x' - \frac{\sqrt{3}}{4} z'.$$

Aufgabe 7. Die Hauptform eines Kegels ist $\lambda_1 x^2 + . = 0$; Gleichung des Tangentenkegels von einem Punkt $P\{\xi \ldots$ (vgl. § 4), geometrisch ist klar, daſs der Kegel in zwei Ebenen zerfällt, und daſs SP die Doppelgerade. Die Rechnung ergiebt entweder aus $P^2(ss') - G(s)\,G(s') = 0$ oder aus der Gleichung der F^2 in Strahlenkoordinaten mühelos $w_1 = \xi\sqrt{\lambda_1} : c$, wo $c = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 K(P)}$ etc. und man sieht, daſs die Existenz vom Zeichen der Potenz des Kegels in P abhängt.

Aufgabe 8. Zu beweisen, daſs jede Ebene durch die Spitze den Kegel in einem Kegelschnitt schneidet, dessen Doppelpunkt die Spitze ist.

Wenn x eine Lösung des Systems, so ist λx etc.

ebenfalls eine Lösung. Man kann den Satz auch durch Koordinatentransformation beweisen, da bei jeder Drehung um den Nullpunkt die neuen Koordinaten homogene lineare Funktionen der alten und v. v. bleiben.

Aufgabe 9. Die Gleichung des Schnitts des Kegels $\lambda_1 x^2 + \ldots = 0$ durch die Ebene $ux + vy + wz = 0$ aufzustellen.

Nimmt man als x'-Achse den Schnitt der Ebene (ε) mit der y-Ebene, die z'-Achse in ε senkrecht auf x', und y' senkrecht auf beiden, so hat man, wenn $u^2 + w^2 = p^2$ und $u^2 + v^2 + w^2 = q^2$ gesetzt wird, das folgende Tableau, wo die Cosinuszeichen fehlen.

$$(x'x) = \frac{u}{p}; \qquad x'y = 0; \quad x'z = \frac{w}{p}$$

$$(y'x) = \frac{w}{q}; \qquad y'y = \frac{v}{q}; \; y'z = \frac{w}{q}$$

$$(z'x) = \frac{-wv}{pq}; \; z'y = \frac{p}{q}; \; z'z = \frac{uv}{pq},$$

hieraus

$$x = \frac{u}{p}x' + \frac{w}{q}y' - \frac{wv}{pq}z' \text{ etc.}$$

und daraus für den Schnitt, für den $y' = 0$ ist,

$$x^2 a^2 + z^2 b^2 + 2abxz = 0,$$

womit zugleich Aufgabe 8 bewiesen ist.

Aufgabe 10. Durch einen Punkt als Spitze und einen durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene gegebenen Kegelschnitt den Kegel zu legen.

Aufgabe 11. Alle parallelen Ebenen, welche nicht durch die Spitze gehen, schneiden den Kegel in homothetischen Kegelschnitten.

---

§ 13. Der Cylinder.

Unter Cylinder verstehen wir einen Kegel, dessen Spitze im Unendlichen liegt, bezw. eine F^2, deren Doppelpunkt S im Unendlichen; wir beschränken uns, heifst dies, auf Cylinder zweiten Grades.

Wir haben wieder das System der vier $\sigma_i(s) = 0$, also $\overline{s_1} : \overline{s_2} : \overline{s_3} : \overline{s_4} = \alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44}$, wo die α die Koeffizienten

von a_{i4} in A bedeuten. Da S im Unendlichen, so mufs $\alpha_{44} = 0$ sein. Wir haben also für den Cylinder 1) $A = 0$, wie beim Kegel 2) $\alpha_{44} = 0$ und 3) dürfen nicht alle α_{i4} zugleich verschwinden. Ist $\alpha_{14} = 0$, so liegt die Spitze in einer Parallelebene zur x-Ebene, ist auch noch $\alpha_{24} = 0$, so liegt sie in einer Parallelen zur z-Achse.

Da $s_4 = 0$, so ist $\overline{s}_1 : \overline{s}_2 : \overline{s}_3 = b_{13} : b_{23} : b_{33}$, wo die b die Bedeutung wie in § 11 haben und die Gleichungen des Paragraphen bestehen bleiben. Der unendlich ferne Doppelpunkt oder die Spitze des Cylinders liegt also in der Richtung der Geraden, deren Richtungsfaktoren $b_{13}, \ldots$ sind, bezw. $b_{11}, \ldots$ bezw. $b_{12}, \ldots$

Jede Gerade, welche diese Richtung hat, heifst Achse des Cylinders.

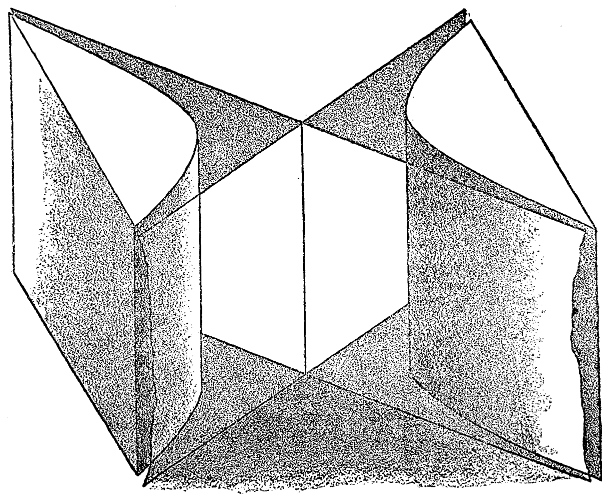


Fig. 9.

(Hyperbolischer Cylinder mit seinen Asymptotenebenen.)

Aufgabe 1. Das Koordinatensystem so zu transformieren, dafs die neue z-Achse in die Richtung der Cylinderachse fällt.

Die Richtungskoordinaten seien $\gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}$. Man hat

$$s_i = \gamma_{i1} s_1' + \gamma_{i2} s_2' + \gamma_{i3} s_3' + 0 s_4';$$
$$s_4 = 0 s_1' + 0 s_2' + 0 s_3' + s_4',$$

wo $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}$ die Richtungskoordinaten der neuen x-Achse etc. bedeuten bezw. bei rechtwinkligen Achsen den Cosinus der Winkel, welche die neue x-Achse mit den alten Achsen bildet. Man lasse die Richtungspunkte ins Unendliche rücken, d. h. setze die Punkte $\gamma_1 \{ \gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}, 0$; $\gamma_2 \{ \gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{32}, 0$; $\gamma_3 \{ \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}, 0$; so dafs also γ_1 und γ_2 beliebige unendlich ferne Punkte und γ_3 die Spitze ist. Da $0 \{ 0, 0, 0, 1$, so haben wir, wenn G(s) die gegebene Form:

$$\begin{aligned} G(s) = {} & s_1'^2\, G(\gamma_1) + s_2'^2\, G(\gamma_2) + s_3'^2\, G(\gamma_3) \\ & + 2\, s_1' s_2'\, P(\gamma_1 \gamma_2) + 2\, s_2' s_3'\, P(\gamma_1 \gamma_3) + 2\, s_2' s_3' . \\ & P(\gamma_2 \gamma_3) + 2\, s_1' s_4'\, P(\gamma_1\, 0) + 2\, s_2' s_4'\, P(\gamma_2\, 0) \\ & + 2\, s_3' s_4'\, P(\gamma_3\, 0) + s_4'^2\, a_{44}. \end{aligned}$$

Weil γ_3 die Spitze, sind $G(\gamma_3)$, $P(\gamma_i \gamma_3)$, $P(\gamma_3\, 0)$ alle $= 0$; also reduziert sich G(s′) bezw. G(s), wenn die Striche wegfallen, auf

$$1)\quad s_1^2\, G(\gamma_1) + s_4^2\, G(\gamma_2) + s_4^2\, a_{44} + 2\, s_1 s_2\, P(\gamma_1 \gamma_2) + 2\, s_1 s_4\, P(\gamma_1\, 0) + 2\, s_2 s_4\, P(\gamma_2\, 0),$$

also (vgl. S. 74).

D r e h t   m a n   e i n e   A c h s e   i n   d i e   R i c h t u n g   d e r   C y l i n d e r a c h s e ,   s o   v e r s c h w i n d e t   d i e   b e t r e f f e n d e   K o o r d i n a t e   a u s   d e r   F o r m   d e s   C y l i n d e r s.

Aufgabe 2. Die Polarebenen aller Punkte gehen durch die Spitze, da für deren Koordinaten alle 4 σ verschwinden, wie beim Kegel.

Aufgabe 3. Alle Punkte, welche auf derselben Parallelen nach der Spitze, also auf derselben Cylinderachse, liegen, haben dieselbe Polarebene.

Für diese Punkte ändern sich in 1) $s_1\, s_2\, s_4$ nicht, sondern nur s_3 und dies kommt in 1) nicht vor.

Aufgabe 4. Liegt ein Punkt P auf dem Cylinder, so liegt die zugehörige Cylinderachse ebenfalls auf dem Cylinder.

Aufgabe 5. Alle Punkte des Cylinders, welche auf derselben Achse liegen, haben die gleiche Tangentialebene.

Aufgabe 6. Alle Ebenen, welche durch die Spitze gehen (d. h. die Richtung der Cylinderachse enthalten), schneiden den Cylinder in Geraden, welche Cylinderachsen sind.

Aufgabe 7. Parallele Ebenen, welche keine Cylinderachse enthalten (nicht durch die Spitze gehen), schneiden den Cylinder in kongruenten Kegelschnitten.

Die Schar dieser Ebenen ist in der Form $ax + by + c(z - \zeta) = 0$ enthalten, wo ζ variabel; die Gleichung 1) ändert sich nicht, wenn man den Ursprung in der z-Achse nach dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = \zeta$ verschiebt.

Die Gleichung läfst sich noch vereinfachen; es lassen sich generaliter die Glieder, welche die Koordinaten x und y in der ersten Potenz enthalten, beseitigen, und das Glied mit xy. Wählt man γ_2 in der Polarebene von γ_1, so ist $P(\gamma_2 \gamma_1) = 0$, das Glied xy fällt weg. Setzt man dann $s_1 = s_1' - s_3 \dfrac{P(\gamma_1 0)}{G(\gamma_1)}$ etc., so erhält man (Striche fehlen)

$$2) \qquad \mathbf{s_1^2 G(\gamma_1) + s_2^2 G(\gamma_2) + C s_3^2 = 0,}$$

wo C leicht zu bilden.

Der Kegelschnitt, den 1 bezw. 2 bei festem z darstellt, ist dann ein centraler; der Punkt, dessen alte Koordinaten $\dfrac{-P(\gamma_1 0)}{G(\gamma_1)}$ etc. sind, sein Centrum.

Es kann aber vorkommen, dafs dadurch, dafs $P(\gamma_2 \gamma_1) = 0$ gesetzt wurde, von selbst $G(\gamma_1)$ bezw. $G(\gamma_2)$ verschwinden, und dann rückt der Mittelpunkt ins Unendliche; der Kegelschnitt wird zur Parabel.

Es ist

$$G(\gamma_1) G(\gamma_2) - P^2(\gamma_1 \gamma_2) = (\gamma_{11} \sigma_1' + \gamma_{21} \sigma_2' + \gamma_{31} \sigma_{31}) (\gamma_{12} \sigma_1^2 + \ldots) - (\gamma_{11} \sigma_1^2 + \ldots)(\gamma_{12} \sigma_1' + \ldots)$$

Bezeichnen wir dieselben Verbindungen der γ, die wir bei den a_{ik} mit b_{ik} bezeichnet haben, mit δ_{ik}, so erhalten wir unter Benutzung der Formeln 5 und 6 des § 11

$$3) \qquad G(\gamma_1) G(\gamma_2) - P^2(\gamma_1 \gamma_2) = (b_{13} \delta_{13} + b_{23} \delta_{23} + b_{33} \delta_{33})^2 : b_{33} = Q.$$

Da aber b_{13}, b_{23}, δ_{13}, δ_{23} den Faktor $\sqrt{b_{33}}$ haben, so hat Q den Faktor b_{33}, d. h. also wenn $b_{33} = 0$ und $P(\gamma_1 \gamma_2) = 0$, so ist $G(\gamma_1)$ bezw. $G(\gamma_2)$ auch gleich Null. Ist $b_{33} < 0$, so haben $G(\gamma_1)$ und $G(\gamma_2)$ entgegengesetztes Zeichen, ist $b_{33} > 0$, gleiches, also:

Je nachdem b_{33}, d. h. $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, = 0, < 0$ ist, wird der Cylinder von jeder Ebene, die die Achsenrichtung nicht enthält, in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten und je nachdem heifst der Cylinder: Elliptisch, Parabolisch, Hyperbolisch.

Der elliptische Cylinder wird, wenn C dasselbe Zeichen hat wie $G(\gamma_1)$, imaginär.

Aufgabe 8. Der Parabolische Cylinder wird von der unendlich fernen Ebene berührt.

Für jeden unendlich fernen Punkt des Cylinders ist die Bedingung des Ineinanderliegens von Pol und Polare erfüllt; die Tangentialebene eines unendlich fernen Punktes der Fläche geht durch jeden andern unendlich fernen Punkt. Da jede Ebene, welche den Cylinder berührt, ihn in einer Kante berührt, so hat der Parabolische Cylinder Eine unendlich ferne Kante.

Aufgabe 9. Der elliptische Cylinder hat keine (reelle) unendlich ferne Kante, der hyperbolische zwei.

Aufgabe 10. Die Spitze eines Cylinders liegt in der Richtung a, b, c, der Cylinder soll durch den Kegelschnitt $\varphi^2(s) = 0$, $\varphi^1(s) = 0$ hindurchgehen.

Da eine Verlegung des Ursprungs in der Richtung der Cylinderachse die Cylindergleichung nicht ändert, so mufs $\varphi^2(s + a r s_4) = 0$ und $\varphi^1(s + a r s_4) = 0$ sein. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $r = -\frac{\varphi^1(s)}{\varphi^1(a b c 0)}$ und das giebt für die Gleichung des gesuchten Cylinders

$$\varphi^{12}(a)\,\varphi^2(s) - 2\,\varphi^1(s)\,\varphi^1(a)\,P(s_1 a) + \varphi^{12}(s)\,\varphi^2(a b c 0) = 0.$$

Aufgabe 11. Um einen gegebenen Quadrik G(s) den Cylinder zu beschreiben, dessen Achse gegeben ist.

$$P^2(s a b c 0) - G(s)\,G(a b c 0) = 0$$

so z. B. ist der einer Kugel umschriebene Cylinder, dessen Achsenrichtungswinkel α, β, γ sind (rechtwinklige Achsen, Centrum Ursprung).

$$C = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma - 2 x y \cos\alpha \cos\beta - \ldots - r^2 = 0.$$

Da $\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ etc., so ist sofort klar, dafs $C(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 0$ ist.



§ 14. Die Transformation auf die Hauptachsen.

Jedes System konjugierter Durchmesser eines Schnittkegelschnitts bildet mit der Kantenrichtung ein Poldreikant. Um das rechtwinklige zu finden, betrachten wir eine Reyesche Achse durch 0, auf der ein unendlich ferner Pol a $\{ s_1', s_2', s_3', 0$ bezw. $\} x', y', z', 0$ liegt, es ist dann wieder

$$\sigma_1 (a) = \lambda x', \ \sigma_2 (a) = \lambda y', \ \sigma_3 (a) = \lambda z'$$

und wir erhalten das Gleichungssystem n des § 7 und somit für λ die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, welche, da $\alpha_{44} = 0$ ist, die Wurzel 0 hat (vgl. S. 65). Sie reduziert sich auf

$$4) \qquad \lambda (\lambda^2 - \lambda s + \sigma) = 0,$$

wo $s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\sigma = b_{11} + b_{22} + b_{33}$ ist. Die Wurzel $\lambda = 0$ giebt, wie vorauszusehen, als eine dieser Achsenrichtungen die Richtung der Cylinderkanten mit den Faktoren b_{13}, b_{23}, b_{33}. Wir nehmen zunächst an, dafs $b_{33} \neq 0$, dann sind die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 von 0 verschieden. Die Resultate des § 12 bleiben bestehen, die drei Hauptachsen stehen aufeinander senkrecht. Wir wählen ihr Dreikant zum Koordinaten-Achsen-Dreikant und ordnen die neue x-Achse der Wurzel λ_1, die neue y-Achse der Wurzel λ_2, die neue z-Achse der Wurzel $\lambda_3 = 0$ zu. Es wird dann $P(\gamma_1 \gamma_2)$ von selbst zu Null, $G(\gamma_1)$ und $G(\gamma_2)$ werden wieder zu λ_1 und λ_2 und wir erhalten

$$s_1^2 \lambda_1 + s_2^2 \lambda_2 + s_4^2 a_{33} + 2 s_1 s_3 P(\gamma_1 0) + 2 s_2 s_3 P(\gamma_2 0) = 0,$$

wo wir für $P(\gamma_{1,2} 0)$ auch schreiben können $\sigma_4 (\gamma_{1,2})$.

Verschieben wir nun das Koordinatencentrum nach $M \left\{ \frac{-\sigma_4(\gamma_1)}{\lambda_1}; \frac{-\sigma_4(\gamma_2)}{\lambda_2}, z = z, \right.$ so erhalten wir die Normalform des centralen Cylinders

$$5) \qquad s_1^2 \lambda_1 + s_2^2 \lambda_2 + C = 0.$$

Die Richtungsfaktoren der drei Hauptachsen sind

$$\lambda_3 \{ b_{13}, b_{23}, b_{33}; \ \lambda_1 \{ + b_{13} + \lambda_1 a_{13}; \ b_{23} + \lambda_2 a_{23}; \\ b_{33} - \sigma + \lambda_1 a_{33},$$

wo zur Vereinfachung von β_{33}^1 die Gleichung 4) benutzt ist.

Der Cylinder kann angesehen werden als F^2 mit einer ganzen Linie von Centren, da jede Sehne, welche durch

einen Punkt M geht, in M halbiert wird. Der Cylinder ist elliptisch, wenn λ_1 und λ_2 das gleiche Zeichen haben, dann mufs in 4) $\sigma > 0$ sein, da aber $\sigma = b_{11} + b_{22} + b_{33}$ (vgl. 5) und 6) des § 3) gleich $b_{33}^{-1}(b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2)$, so heifst dies also $b_{33} > 0$ wie bereits bewiesen. Ebenso ist der Cylinder hyperbolisch, wenn $\sigma < 0$, d. h. $b_{33} < 0$. Wenn $b_{33} = 0$, rückt M ins Unendliche. Der elliptische Cylinder ist imaginär, sobald C in 5) dasselbe Zeichen hat wie λ_1 und λ_2.

Die Berechnung von C vereinfacht sich zwar dadurch, dafs $a_{14} b_{13} + a_{24} b_{23} + a_{34} b_{33} = 0$, indessen ist sie für die Entscheidung über die Art des Cylinders nicht nötig. Man kann den Satz benutzen:

Aufgabe 1. Alle Ebenen, welche die Kanten schneiden, schneiden gleichartige Kegelschnitte aus.

Die Ebene $z = 0$ schneidet den Cylinder in der C^2

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + a_{44} = 0$$

und diese ist Ellipse und reell, wenn $b_{33} > 0$ und $a_{11} a_{44} > 0$, Ellipse und imaginär, wenn $b_{33} >$ und $a_{11} a_{44} < 0$, Hyperbel, wenn $b_{33} < 0$, und Parabel, wenn $b_{33} = 0$.

Man sieht aus dem Anblick von C sofort, dafs wenn s, d. h. $a_{11} + a_{22} + a_{33} > 0$, und a_{44} auch $\geqq 0$, dann $C > 0$, d. h. der Cylinder imaginär ist.

Aufgabe 2. Die Berechnung von C.

Es ist $\dfrac{\sigma_4^2(\gamma_1)}{\lambda_1} = \dfrac{1}{\lambda_1 n_1^2}(\sigma_4(\beta_1))^2$, wo $n_1^2 = \beta_{13}^{1^2} + \beta_{23}^{1^2} + \beta_{33}^{1^2}$ $= \beta_{33}^1(\beta_{11}^1 + \beta_{22}^1 + \beta_{33}^1) = \beta_{33}^1 \tau$; $\tau = \sigma - 2\lambda_1 s + \lambda_1^2 = -\lambda_1 s$, also $n_1^2 = -\beta_{33}^1 \lambda_1 s$. Es ist

$$\sigma_4(\beta^1) = a_{14}\beta_{13}^1 + a_{24}\beta_{23}^1 + a_{34}\beta_{33}^1.$$

Weil $\alpha_{44} = 0$, gelten die Gleichungen $a_{14} b_{1i} + a_{24} b_{2i} + a_{34} b_{3i} = 0$, also $a_{14} : a_{24} : a_{34} = b(b_{13}) : b(b_{23}) : b(b_{33})$, wo das b vor der Klammer andeutet, dafs wir dieselben Verbindungen mit den b_{ik} vorzunehmen haben, wie früher mit den a_{ik}, um die b_{ik} zu bilden. Die drei Koeffizienten sind einzeln 0, aber sie verhalten sich wie $a_{13} : a_{23} : a_{33}$, folglich $\sigma_4(\beta') = \dfrac{a_{34}}{a_{33}} \lambda_1 \beta_{33}^1$, also $\dfrac{\sigma_4^2(\gamma_1)}{\lambda_1} = -\dfrac{a_{34}^2}{a_{33}^2} \dfrac{\beta_{33}^1}{s}$ und

$$6)\quad C = -\frac{a_{34}^2}{a_{33}^2}\left(\frac{s\, a_{33} - 2(b_{11} + b_{22})}{s}\right) + a_4.$$

Aufgabe 3. Rechtwinklige Koordinaten; Fläche $(c(x-\alpha)-az)^2+(c(x-\beta)-bz)^2-r^2=0$, wo $a\,b\,c\,\alpha$, r Konstanten (a, b, c Richtungsfaktoren der Spitze; Schnitt durch die Ebenen $z=d$? Hauptform?).

Aufgabe 4. Cylinder, dessen Achse der Schnitt der Ebenen $xa+yb+zc=0$, $xa'+yb'+zc'=0$ ist.

Bezeichnet man die erste Form mit ε und die zweite mit ε', so mufs, wenn ein Punkt $P\{\alpha\beta\gamma\{p$ auf der Fläche liegt, auch die ganze Parallele zur Achsenrichtung auf der Fläche liegen. Die Gleichungen dieser Parallelen sind $\varepsilon-\varepsilon_p=0$, $\varepsilon'-\varepsilon_p'=0$, es mufs also die gesuchte Gleichung

$$\varphi^2(\varepsilon,\varepsilon')=0 \tag{6}$$

sein, wo φ^2 eine Funktion zweiten Grades bedeutet.

Aufgabe 5. Cylinder, dessen Achse der Schnitt der Ebenen $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=0$ ist und der durch den Kegelschnitt $\varphi^2(x,y,z)=0$; $\varepsilon''=0$ hindurchgeht. Aus den drei Gleichungen $ax+by+cz=\varepsilon$; $a'x+b'y+c'z=\varepsilon'$; $a''x+b''y+c''z=0$ bestimmen wir x, y, z als Funktionen von ε und ε', und setzen diese Werte in $\varphi^2(x,y,z)=0$ ein, das giebt $\psi^2(\varepsilon,\varepsilon')=0$. Diese Gleichungen stellt a) einen Cylinder dar, b) ist sie erfüllt, wenn $\varphi(x,y,z)=0$ und $a''x+b''y+c''z=0$ ist. Welche Bedingung müssen die drei Ebenen erfüllen?

---

§ 15. Der Parabolische Cylinder.

Wenn in der Hauptachsengleichung des Cylinders $\sigma=0$ wird, d. h. $b_{33}=0=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, so wird generaliter eine zweite Wurzel λ der Hauptachsengleichung 0, und alle b_{ik} sind 0.

Aufgabe 1. Die Ausnahme zu untersuchen.

$$\sigma=w_1^2+w_2^2+w_3^2=w_1^2\left(1+\frac{w_2^2}{w_1^2}+\frac{w_3^2}{w_1^2}\right),$$

also wenn $b_{33}=0$ und $\dfrac{b_{13}}{b_{23}}$ endlich und bestimmt bleibt, dagegen $b_{33}:b_{13}$ und $b_{33}:b_{23}=0$, so verschwindet σ im allgemeinen nicht. Dies tritt ein, wenn die Cylinderachse auf der z-Achse senkrecht steht.

Daſs alle b_{ik}, von der Ausnahme abgesehen, verschwinden, folgt aus den Gleichungen 5 und 6 des § 11, denn wenn $b_{33} = 0$, so sind auch $b_{13} = 0$ und $b_{23} = 0$. Wenn aber die Achse eine bestimmte Richtung hat, so sind $b_{12} : b_{23}$ und $b_{13} : b_{33}$ bestimmt (den Ausnahmefall Aufgabe 1 werden wir bei den Kreisschnitten näher betrachten) und folglich $b_{11} = b_{13}(b_{13} : b_{33}) = 0$ und b_{22} desgl. und ebenso b_{ik}.

Aufgabe 2. Den Beweis des Verschwindens der b_{ik} geometrisch zu führen.

Es sind die Richtungskoordinaten der drei Achsen λ den Gröſsen a_{13}, a_{23}, a_{33} proportional, da mit b_{33} auch b_{13} und b_{23} verschwinden. Die Richtungscosinus x, y, z der Achse $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ genügen den Gleichungen $\sigma_i(a) = 0$, d. h.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0;\; a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = 0;$$
$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = 0;$$

d. h. die Achse steht auf den drei Geraden $g_1\{a_{11}, a_{12}, a_{13}$; $g_2\{a_{22}$; $g_3\{a_{33}$ senkrecht. Die drei Richtungen gehören also Einer Ebene ε an. Ist nun $b_{33} = 0$, d. h. $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, so sind die xy-Projektionen von g_2 und g_1 der Richtung nach identisch, d. h. also: die Ebene ε enthält der Richtung nach die z-Achse. Die Cylinderachse $\lambda = 0$ steht also auf der Ebene ε senkrecht. Die Gleichheit zweier Achsen ist aber vom Koordinatensystem unabhängig, ist invariant und es müſste also die Cylinderachse auf jeder beliebigen zweiten Achse, d. h. jeder Geraden, senkrecht stehen. Der Wiederspruch löst sich nur dann, wenn die drei Geraden g_1, g_2, g_3 in eine Einzige zusammenfallen, d. h. also: wenn alle $b = 0$, d. h.

$$1)\quad a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{12} : a_{22} : a_{23} = a_{13} : a_{23} : a_{33},$$

d. h. aber K(s) in G(s) ist ein vollständiges Quadrat. Dies ist also die nötige und hinreichende Bedingung, daſs G(s) einen parabolischen Cylinder darstelle.

Aufgabe 3. Die Richtung der Achse zu bestimmen.

Die Cylinderachse muſs auf $g\}a_{13}$ senkrecht stehen und zugleich auf $g\}a_{14}, a_{24}, a_{34}$, weil für ihren unendlich fernen Punkt a, b, c, 0 (die Spitze oder Doppelpunkt) alle vier σ, also auch $\sigma_4\}a_{14}a + a_{24}b + a_{34}c$ verschwinden.

Aufgabe 4. Die Hauptform des Parabolischen Cylinders herzuleiten.

Die Gleichung 4) des vorigen § geht, da $P(\gamma_2\, 0) = 0$ ist, über in $s_2^2\, \lambda_3 + s_4^2\, a_{44} + 2\, s_1\, s_4\, \sigma_3(\gamma_1) = 0$, wo $\lambda_3 = s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, woraus sich sofort als Hauptform ergiebt

$$2) \qquad \eta^2\, \lambda_3 + 2\, \xi\, c = 0.$$

Aufgabe 5. Die Form 2) direkt aus der gegebenen Form $G(s) = 0$ herzuleiten.

Die Bedingungen 1) sagen uns, dafs $K(s)$ ein vollständiges Quadrat, d. h. dafs

$$G(s) \left\{ (x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} + z\sqrt{a_{33}})^2 + 2\, x\, a_{14} + 2\, y\, a_{24} + 2\, z\, a_{34} + a_{44} \right.$$

oder

$$G(s) \left\{ \frac{s}{s} (x\sqrt{a_{11}} + \ldots)^2 + \ldots \right.$$

Setzt man nun $\eta = \sqrt{\frac{a_{11}}{s}} + \ldots$, d. h. also, da $\sqrt{a_{11}} : \sqrt{a_{22}} : \sqrt{a_{33}} = a_{13} : a_{23} : a_{33}$, setzt man die neue y-Achse parallel g_3, so kommt $G(s) \left\{ s\,\eta^2 + 2\, a_{14}\, x + \ldots \right.$

Setzt man nun $n^2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2$ und $n\,\xi = a_{14}\, x + a_{24}\, y + a_{34}\, z$, d. h. also die neue x-Achse parallel g_4, so erhält man

$$G \left\{ s\,\eta^2 + 2\, n\, \xi + a_{44}. \right.$$

Verschiebt man die Koordinaten parallel nach $0, 0, \frac{p}{2n}$, so ergiebt sich uns 2).

Ist $a_{14}\, a_{13} + a_{24}\, a_{23} + a_{34}\, a_{33} = 0$, so stehen auch g_3 und g_4 aufeinander senkrecht und die ξ-, η- und z-Achse bilden ein rechtwinkliges System. Die Gleichung 2) stellt bei beliebigem z eine Parabel dar, bezogen auf ein Paar konjugierte Achsen.

Aufgabe 6. Fläche $x^2 + 4\, x\, y + 6\, x\, z + 4\, y^2 + 12\, y\, z + 9\, z^2 + 2\, x + 4\, y - 6\, z + 1 = 0$.

Aufgabe 7 wie Aufgabe 6), aber Koordinatensystem $\lambda = \mu = \nu = 60^0$.

Winkel der Hauptachsen mit den gegebenen Achsen.

IV. Abschnitt.

Die eigentlichen centralen Flächen zweiten Grades in allgemeiner Behandlung.

§ 16. Der Asymptotenkegel.

Die allgemeine Form der eigentlichen F^2 mit Centrum war $G(s) = K(s) + s_4 E(s) = 0$, wo $A \neq 0$, $K(s)$ die Form eines Kegels, d. h. $\alpha_{44} \neq 0$ und $E(s)$ eine Ebene. Wählte man das Centrum $M \} \alpha_{i4}$ zum Ursprung, so reduzierte sich $E(s)$ auf $\alpha'_{44} s_4 = c s_4 = (A : \alpha_{44}) s_4$, d. h. $E(s) = 0$ würde zur unendlich fernen Ebene.

Aufgabe 1. Die Transformation auf das Centrum auszuführen.

$$s_{1,23} = s'_{1,23} \cdot \alpha_{44} + s_4' \alpha_{1,23}; \; s_4 = 0 s_4' + s_4' \alpha_{44}.$$

$$G(s) = \alpha_{44}^2 K(s') + 2 (s_1 \sigma_1 (M) + s_2 \sigma_2 (M) + s_3 \sigma_3 (M) + 0 \sigma_4 (M)) \alpha_{44} s_4' + s'^2_4 G(M) \{ K(s') + A : \alpha_{44}.$$

Die Konstante C kann man auch gleich -1 setzen, da der Kegel $K(s)$ sich durch Division mit $-C$, welches $\neq 0$ ist, nicht ändert, bezw. der Längenmafsstab auf dem Kegel beliebig ist, wir haben daher

$$G(s) \{ K(s) - s_4^2 = 0 \{ K(xyz) - 1 = 0.$$

Der Kegel $K(s) = 0$ hiefs der Asymptotenkegel, da für $s_4 = 0$, d. h. für alle unendlich fernen Punkte $G(s) \{ K(s)$.

Aufgabe 2. Jede Ebene schneidet die F^2 und ihren Kegel in homothetischen Kegelschnitten.

Aufgabe 3. Die Hauptachsen des Kegels und allgemeiner jedes System konjugierter Durchmesser des Kegels bilden ein System konjugierter Durchmesser der F^2.

Die Gröſsen σ_1, σ_2, σ_3 sind für beide Flächen identisch.

Aufgabe 4. Der Kegel K und die F^2 haben im Endlichen keinen Punkt und keine Tangentialebene gemein.

Aufgabe 5. Eine Gerade, welche einer Kante des Kegels K parallel ist, schneidet die F^2 im Unendlichen.

Sind a, b, c die Richtungsfaktoren einer solchen Geraden, so ist $K(a, b, c) = 0$ also $G(s) = K(x_0) + 2rP(x_0, a) + r^2 K(a) - 1 = 0$ eine quadratische Gleichung, für welche der Faktor von $r^2 = 0$, d. h. also: eine solche Gerade hat mit der F^2 einen Punkt im Unendlichen und generaliter einen Punkt im Endlichen gemein (vgl. S. S. VIII S. 3 und 4).

Aufgabe 6. Eine Gerade, welche einer Kante von K parallel ist und in der Tangentialebene desselben in dieser Kante liegt, hat mit der Fläche entweder keinen oder alle Punkte gemeinsam. Das Letztere tritt ein, sobald die Gerade einen Punkt mit der Fläche gemeinsam hat.

Aufgabe 7. Eine Tangentialebene an dem Kegel K, welche die Fläche F^2 schneidet, schneidet sie in zwei der Berührungskante parallelen Geraden.

Aufgabe 7a. Diesen Satz durch Rechnung zu beweisen.

Man mache die Tangentialebene $P(x, a)$ zur Ebene $z = 0$.

Aufgabe 8. Wenn der Kegel Rotationskegel, ist die Fläche Rotationsfläche, und wenn der Kegel der Kugelkegel, ist die Fläche Kugel. (Aufgabe 2; es genügt daher für die Kugel, daſs in der Hauptachsengleichung $3\sigma = s^2$ und $27a = s^3$.

Aufgabe 9. Für den Kegel hatten wir nur die beiden Fälle zu unterscheiden: 1) alle 3 λ gleiches Zeichen, 2) zwei gleiches Zeichen, das Dritte entgegengesetztes; wie viel Fälle haben wir für die F^2 zu trennen?

1) alle 3 λ negativ (das ursprüngliche K (s) ist mit $c = -\frac{A}{\alpha_{44}}$ dividiert), 2) alle 3 λ positiv, 3) zwei λ positiv, das dritte negativ, 4) zwei λ negativ, das dritte positiv. Die zugehörige F^2 unterscheiden wir als 1) imaginäres Ellipsoid, 2) (reelles) Ellipsoid, 3) einschaliges Hyperboloid, 4) zweischaliges Hyperboloid, deren gemeinsame Hauptform

$$G(s) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 1 = 0$$

wir fortab zu Grunde legen.

---

§ 17. Ebene Schnitte.

Um den Schnitt der Ebene $E(s)\{s_1 b_{13} + s_2 b_{23} + s_3 b_{33} + s_4 b_{43} = 0$ mit $G(s)$ zu untersuchen, kann man $E(s)$ zu einer der Koordinatenebenen machen, wie wir dies schon Teil 1 gethan haben.

Aufgabe 1. Schnitt der Ebene $x + y + z - 1 = 0$ und der Fläche $G(s) = 0$.

Um das Koordinatensystem in der Ebene so zu haben, wie es in der Ebene gebräuchlich, wählen wir die Schnittlinie der Ebene als ζ-Achse und in der Ebene $+\xi$ rechts von $+\zeta$, und η nach $+y$ hin senkrecht auf E. Es ist dann die ζ-Achse $\left\{\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi};\ y = 0;\right.$ die η-Achse $\left\{\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}\right.$ wenn $E\{xu + yv + zw = 0$ ist, d. h. wenn wir den Ursprung zunächst ungeändert lassen; die ξ-Achse bestimmt man dadurch, dafs sie auf der Ebene $(\zeta\eta)\{-v \sin\varphi\, x + (u\sin\varphi - w\cos\varphi)\, y + z v\cos\varphi = 0$ senkrecht steht. Der Winkel φ ist durch seine Tangente bestimmt. Es ist $\sin\varphi = \frac{-u}{p}$, $\cos\varphi = \frac{-w}{p}$ wo $p^2 = u^2 + w^2$; setzen wir noch $n^2 = u^2 + v^2 + w^2$, so ist das Tableau

$$\begin{array}{c|ccc|}
\xi & \frac{vu}{pn}; & \frac{+p^2}{pn}; & \frac{vw}{pn} \\
\eta & \frac{u}{n}; & \frac{v}{n}; & \frac{w}{n} \\
\zeta & \frac{-w}{p}; & 0; & \frac{u}{p}
\end{array}$$

also

$$x = \frac{vu}{pn}\xi + \eta\frac{u}{n} - \zeta\frac{w}{p}$$

$$y = \frac{+p^2}{pn}\xi + \eta\frac{v}{n} + \zeta\, 0$$

$$z = \frac{vw}{pn}\xi + \eta\frac{w}{n} + \zeta\frac{u}{p}$$

Für die schneidende Ebene ist $\eta = 0$, also

$$x = \frac{v\,u}{p\,n}\,\xi - \zeta\,\frac{w}{p}; \quad y = \frac{p}{n}\,\xi; \quad z = \frac{v\,w}{p\,n}\,\xi + \zeta\,\frac{u}{p}.$$

Ist die schneidende Ebene $u\,x + v\,y + w\,z - d = 0$, so verschieben wir das Koordinatensystem parallel in den Punkt, in welchem die η-Achse die Ebene schneidet, dann mufs für $\xi, \eta, \zeta = 0$, $x = \frac{d\,u}{n}$ etc. sein, also haben wir $\frac{d\,u}{n}$, $\frac{d\,v}{n}$, $\frac{d\,w}{n}$ hinzuzufügen.

Hier ist $u = 1$, $v = 1$, $w = 1$, $d = 1$, $p = \sqrt{2}$, $n = \sqrt{3}$,

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{6}} - \frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\xi + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\xi + \frac{\zeta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wir erhalten den Kegelschnitt

$$\xi^2\left(\frac{\lambda_1}{6} + \frac{2}{3}\,\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{6}\right) + \cdots$$

Aufgabe 2. Alle parallelen Ebenen schneiden die F^2 in homothetischen Kegelschnitten.

Da diese an sich einfachste Methode die Schnitte zu untersuchen mit weitläufiger Rechnung verknüpft ist, kann man die Methode dadurch ändern, dafs man durch die Schnittkurve eine passende Spezialfläche zweiten Grades legt. Wir wählen einen Cylinder, dessen Achse auf der Schnittebene senkrecht steht, also die gleichen Richtungsfaktoren hat. Wir haben dann

$$1) \qquad C(s) = G(s) + E(s)\,H(s) = 0,$$

denn $C(s)$ mufs verschwinden, sobald $G(s)$ und $E(s)$ gleichzeitig verschwinden. $H(s) = 0$ stellt dann eine zweite Ebene, die Nebenebene, dar und $G(s) = 0$ und $H(s) = 0$ bestimmen die zweite ebene Schnittkurve der beiden Flächen zweiten Grades (vgl. § 1). $H(s)$ ist dann völlig bestimmt, es sei $\}\,2\,u, 2\,v, 2\,w, d$. Es hat dann $C(s)$ die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades in x, y, z

$a_{11} = \lambda_1 + 2\, b_{13} u;\ a_{12} = b_{13} v + b_{23} w;\ a_{13} = b_{13} w + b_{33} u$
$a_{22} = \lambda_2 + 2\, b_{23} v;\ a_{23} = b_{23} w + b_{33} v;\ a_{33} = \lambda_3 + 2\, b_{33} w.$

Man sieht sofort, dafs C(s) sich nicht ändert, wenn man $b_{13} \ldots$ mit $u \ldots$ vertauscht. Setzt man wieder $a_{11} + a_{22} + a_{33} = s$, $b_{11} + b_{22} + b_{33} = \sigma$, so haben wir für die Hauptachsen des Cylinders, welche $\neq 0$ sind, die Gleichung

$$2) \qquad L^2 - L s + \sigma = 0$$

und für die Richtungsfaktoren der Cylinderachsen

$$b'_{13},\ b'_{23},\ b'_{33};\ \ b'_{13} + L' a_{13};\ \ b'_{23} + L' a_{23};$$
$$b'_{33} + L' a_{33} \text{ etc.}$$

Da die Cylinderachsen die Richtungsfaktoren b_{13} etc. haben, so sind die gestrichenen b von den ungestrichenen nur durch einen konstanten Faktor verschieden, und so lange dieser nicht 0, ist es gestattet sie zu identifizieren.

Die Gleichung 2 ist zugleich die Hauptachsengleichung des Schnittes.

Aufgabe 3. Die Richtung der Nebenebene zu bestimmen.

Da für den Cylinder $\alpha_{44} = 0$, so haben wir zur Bestimmung von u, v, w das System $a_{1i} b'_{13} + a_{2i} b'_{23} + a_{3i} b'_{33} = 0$ oder

$$3) \qquad u \sigma b'_{33} + b'_{13} (u b'_{13} + v b'_{23} + w b'_{33}) + b'_{13} \lambda_1 = 0 \text{ etc.}$$

wo es in 3) gleichgültig ist, ob wir b oder b′ meinen, dagegen $\sigma = (b'^2_{13} + b'^2_{23} + b'^2_{33}) : b'_{33} = b'_{33} : \cos^2 \gamma = b'_{23} : \cos \beta \cos \gamma = b'_{13} : \cos \alpha \cos \gamma$, wo α, β, γ die Richtungswinkel der Schnittebene E sind. Bezeichnet man die dem Cosinus des Neigungswinkels zwischen Haupt- und Nebenebene proportionale Gröfse mit ϑ, und führt man als Unbekannte $u b'_{13}$, $v b'_{23}$, $w b'_{33}$ mit x, y, z ein, so haben wir nach Division mit b'_{13} etc.

$$3\text{a}) \qquad \frac{x}{\cos^2 \alpha} + \vartheta + \lambda_1 = 0 \text{ etc.}$$

und da $\vartheta = x + y + z$ ist, erhalten wir für ϑ

$$4) \qquad -2\,\vartheta = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \beta + \lambda_3 \cos^2 \gamma.$$

Die Gleichungen 3a) bleiben, weil nur von den Quotienten der b abhängig, auch für den parabolischen Cylinder richtig.

Aus 3) sieht man, daſs, sobald einer der Richtungsfaktoren von E, z. B. b_{13} verschwindet, auch der entsprechende der Nebenebene verschwindet, z. B. u und damit a_{12} und a_{23}.

Aufgabe 4. Ist die schneidende Ebene einer der drei Hauptachsen parallel, so ist es auch die Nebenebene und die eine Hauptachse der Schnittkurve ist der betreffenden Hauptachse parallel.

Aufgabe 5. Die Qualität des Schnittes zu bestimmen.

Der Schnitt ist Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem der Cylinder elliptisch etc., d. h. also nach § 13, je nachdem $b_{33} > 0, = 0, < 0$. Es ist aber $b_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, und es ergiebt sich

$$5) \quad b_{33} = \cos^2 \gamma (\lambda_1 \lambda_2 \cos^2 \gamma + \lambda_2 \lambda_3 \cos^2 \alpha + \lambda_3 \lambda_1 \cos^2 \beta)$$
$$= \cos^2 \gamma \, R$$

also der Schnitt ist Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem $R > 0, = 0, < 0$ ist.

Aufgabe 6. Die Hauptachsengleichung des Schnittes.

Aus 2) ergiebt sich, da $s = \Sigma \lambda + 2 \vartheta$ ist und $\sigma = b_{33} : \cos^2 \gamma = R$

$$6) \qquad L^2 - L \Sigma \lambda \sin^2 \alpha + R = 0.$$

Die Achsen selbst sind dadurch nicht bestimmt, sondern ihr Verhältnis.

Aufgabe 7. Die Konstante der Nebenebene.

Sei
$$C(s) = G(s) + 2 E(s) H(s),$$

wo $E(s) = b_{13} \; s_1 + b_{23} \; s_2 + b_{33} \; s_3 + d \, s_4$ und b_{13} etc. $= \cos \alpha$ etc., wo α, β, γ die Richtungswinkel von E, d ihr Abstand vom 0-Punkt, dem Centrum der G(s). Sei $H \{ u, v, w, - \delta$, so haben wir zur Bestimmung von δ die Bemerkung, daſs die Koordinate z′ verschwinden muſs, wenn man die z-Achse in die Cylinderachse dreht. Lassen wir die x- und y-Achse, so haben wir das Transformationsbild

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}$$

und da das alte System rechtwinklig, so ist das Resultat der Transformation, da $x = x' + z' b_{13}$, $y = y' + z' b_{23}$, $z = b_{33} z'$ ist:

$$x^2 a_{11} + 2\,x\,y\,a_{12} + y^2 a_{22} + 2\,x\,z\,\sigma_1(b_{13}\ldots 0)$$
$$+ 2\,y\,z\,\sigma_2(b_{13}\ldots 0) + 2\,x\,a_{14} + 2\,y\,a_{24} + 2\,z\,\sigma_4(b_{13}\ldots 0)$$
$$+ z^2 G(b_{13}\ldots 0) + a_{44} = x^2 a_{11} + 2\,x\,y\,a_{12} + y^2 a_{22}$$
$$+ 2\,x\,a_{14} + 2\,y\,a_{24} + a_{44} = 0.$$

Da $\sigma_4(b_{13}\ldots 0) = 0$ sein mufs, so erhalten wir

$$-d\,2\,.\,(u\,b_{13} + v\,b_{23} + w\,b_{33}) = 2\,\delta\,(b_{12}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2)$$

oder

$$7)\quad 2\,\delta = -2\,\vartheta\,d = d(\lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \cos^2\beta + \lambda_3 \cos^2\gamma).$$

Das Verhältnis der Konstanten der Schnittebene und ihrer Nebenebene ist nur von der Richtung der Schnittebene abhängig.

Aufgabe 8. Den Pol einer Schnittebene zu bestimmen.

Wir haben $f \cos\alpha = \lambda_1 x_p$ etc., $f\,d = 1$, also $x_p = \lambda_1^{-1}$ $\cos\alpha\,.\,d^{-1}$ etc. und $\frac{x_p}{b_{13}\,\lambda_1^{-1}} = \frac{y_p}{b_{23}\,\lambda_2^{-1}} = \frac{z_p}{b_{33}\,\lambda_3^{-1}}$.

Hiermit ist wieder bewiesen (vgl. § 5 Aufgabe 10): die Pole aller parallelen Ebenen liegen auf einem Durchmesser 2), die konjugierten Durchmesser der Fläche und ihres Asymptotenkegels sind identisch.

Aufgabe 9. Das Centrum der Schnittkurve zu bestimmen.

Aus geometrischen Gründen ist ersichtlich, dafs das Centrum da liegt, wo der konjugierte Durchmesser die Ebene schneidet. Rechnung: Zieht man durch diesen Punkt x' eine Gerade der Ebene in der Richtung u, v, w, so ist $u\,b_{13} + v\,b_{23} + w\,b_{33} = 0$, wie bekannt; für die Schnitte der Geraden mit der Fläche haben wir

$$G(x, y, z, 1) = G(x'\ldots 1) + r\,f(u\,b_{13} + v\,b_{23} + w\,b_{33})$$
$$+ r^2 G(u, v, w, 0) = 0$$

und, da der Koeffizient von r verschwindet, so wird die Strecke zwischen den Schnittpunkten in x' halbiert.

Für die Koordinaten des Centrums haben wir, wenn wir $d : b_{13}\,\lambda_1^{-1} + b_{23}\,\lambda_2^{-1} + b_{33}\,\lambda_3^{-1}$ mit c bezeichnen

$$8)\qquad x_c = b_{13}\,\lambda_1^{-1}\,c;\ldots$$

Aufgabe 10. Die Koordinaten des Centrums aus der Gleichung des Schnitts in Aufgabe 8 zu bestimmen.

Aufgabe 11. Den Schnitt der Fläche $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ und der Ebene $x + y - z - 1 = 0$ zu untersuchen.

---

§ 18. Ausgezeichnete Schnitte.

Aufgabe 1. Wann ist der Schnitt eine gleichseitige Hyperbel?

Es sind die Hauptachsen des Schnitts entgegengesetzt gleich, also muſs in deren Gleichung 6, § 17 der Koeffizient von L verschwinden, also:

$$1)\qquad \lambda_1 \sin^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\beta + \lambda_3 \sin^2\gamma = 0$$

d. h.

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (\lambda_1 \cos^2\alpha + \ldots).$$

Man sieht, daſs für die Ellipsoïde diese Bedingung (für reelle Schnitte) unerfüllbar.

Aufgabe 2. Die Ebenen, welche aus einer centralen F^2 gleichseitige Hyperbeln ausschneiden, sind den Tangentialebenen des Kegels mit den Achsen $(\lambda_2 + \lambda_3)^{-1}$; $(\lambda_3 + \lambda_1)^{-1}$; $(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ parallel.

Man multipliziere die zweite Form von 1) mit

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Aufgabe 3. Diese Ebenen sind den Tangentialebenen an die Fläche $x^2\lambda_1^{-1} + y^2\lambda_2^{-1} + z^2\lambda_3^{-1} - 1 = 0$ parallel, welche vom Centrum den Abstand $\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ haben.

Die allgemeine Gleichung giebt, wenn die Ebene $\{\cos\alpha, \ldots d$ ist, für die Tangentialebene an die Fläche $\lambda_1 x^2 + \ldots.$ die Bedingung $d^2 = \cos^2\alpha\,\lambda_1^{-1} + \cos^2\beta\,\lambda_2^{-1} + \cos^2\gamma\,\lambda_3^{-1}$.

Aufgabe 4. Die Ebenen dieser Schar durch einen festen Punkt $P\{x_0$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{(y - y_0)^2}{\lambda_3 + \lambda_1} + \frac{(z - z_0)^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0.$$

Aufgabe 5. Wann ist der Schnitt parabolisch?

Der Cylinder ist dann ein parabolischer, die Cylinderachse $\{b_{i3}$ steht senkrecht auf der Achse $\{a_{13}\, a_{23}\, a_{33}$ bezw. $\sqrt{a_{ii}}$ und die dritte Achse auf beiden; ihre Richtungsfaktoren sind $p\ q\ r$, wo $p = b_{23}\sqrt{a_{33}} - b_{33}\sqrt{a_{11}}$ etc. Es ergiebt

sich sofort $p^2 = \lambda_2 b_{33}^2 + \lambda_3 b_{23}^2$ etc., somit, da $p b_{13} + q b_{23} + r b_{33} = 0$ ist,

2) $$b_{13} \sqrt{\lambda_2 b_{33}^2 + \lambda_3 b_{23}^2} + \ldots = 0.$$

Befreit man diese Gleichung in bekannter Weise von den Irrationalitäten, so ergiebt sich als Bedingung für die Richtungskosinus der Schnittebene

3) $$\cos^2\alpha\, \lambda_1^{-1} + \cos^2\beta\, \lambda_2^{-1} + \cos^2\gamma\, \lambda_3^{-1} = 0,$$

d. h.:

Die Parabolischen Schnitte einer Centralfläche zweiten Grades sind den Tangentialebenen des Asymptotenkegels parallel.

Aufgabe 6. Wann sind die Schnitte Kreise?

Der Cylinder mufs zum Rotationscylinder werden $L_1 = L_2 = \frac{s}{2}$; $\sigma = \frac{s^2}{4}$ und nach § 17

$$b_{13} + L_1 a_{13} = 0;\ b_{33} + L_1 a_{33} = 0;\ b_{12} - \sigma + L_1 a_{33} = 0;$$
$$b_{12} + \frac{s}{2} a_{12} = 0, \text{ also } \frac{a_{13}}{b_{13}} = \frac{a_{23}}{b_{23}} = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

aufser wenn eins der b, z. B. b_{33} gleich 0; daraus folgt $u : v : w = b_{13} : b_{23} : b_{33}$.

Dann haben wir

$$C(s) = G(s) + c\, E^2(s),$$

d. h. die beiden Schnittkurven sind parallel und unser System $a_{11} b_{13} + \ldots$ etc. giebt

$$\lambda_1 + c(b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2) = 0;\ \lambda_2 + c(b_{13}^2 + \ldots) = 0;$$
$$\lambda_3 + \ldots = 0,$$

d. h.
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Wenn also keins der b gleich Null, so mufs G(s) eine Kugel darstellen, die b_{i3} sind willkürlich, und wir finden wieder die bekannte Eigenschaft der Kugel, von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten zu werden.

Ist G(s) keine Kugel, so mufs eins der b′ gleich 0 sein, d. h. die schneidende Ebene einer der Hauptachsen parallel sein; dann werden an sich alle b'_{i3} gleich Null, aber, da die schneidende Ebene eine bestimmte Richtung haben soll, so können wir, wenn z. B. $b'_{33} = 0$, d. h. die

schneidende Ebene der z-Achse parallel ist, setzen $b'_{33} : b'_{23} = b_{33} : b_{23}$ und unsere Systeme bleiben, nur w und b_{33} sind 0, $\frac{s}{2} = \lambda_3$.

Wir haben dann, da $a_{33} = \lambda_3$, weil b_{33} w gleich 0 ist,

$$a)\ a_{11} + a_{22} = \lambda_3;\ b)\ a_{11}\, a_{22} = a_{12}^2;$$

$$c)\ a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{12} = 0;\ a_{12}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} = 0,$$

oder mit Benutzung von b)

$$a_{11}\, b_{13}^2 = a_{22}\, b_{23}^2,$$

d. h.
$$\frac{a_{11}}{b_{23}^2} = \frac{a_{22}}{b_{13}^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{b_{13}^2 + b_{23}^2}.$$

Es ist erlaubt, $b_{13} = \cos\alpha$; $b_{23} = \cos\beta$ zu setzen, wodurch

$$a_{11} = b_{13}^2\, \lambda_3;\ a_{22} = b_{13}^2\, \lambda_3,$$

und damit sind $2\,u\,b_{13}$ und $2\,v\,b_{23}$ als Funktionen von b_{13} und b_{23} bestimmt. Die Gleichung a) giebt dann

$$d)\qquad \lambda_3 = \lambda_1\, b_{23}^2 + \lambda_2\, b_{13}^2.$$

$$4)\qquad b_{13}^2 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1};\ b_{23}^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Hiermit haben wir zwei Scharen von Ebenen, je nachdem wir die Wurzeln mit gleichen oder entgegengesetzten Zeichen nehmen, und, da wir ebensogut $b_{13} = 0$ oder $b_{23} = 0$ (bezw. b_{11} oder b_{22}) setzen könnten, so giebt es im allgemeinen, von Kugel und Kugelkegel abgesehen, sechs Scharen von Kreisschnitten, also:

Auf jeder centralen Fläche zweiten Grades, den Kegel selbst eingeschlossen, giebt es drei Paar reeller oder imaginärer Kreisschnittscharen, identisch für die ganze Schar homothetischer Flächen, ausgeschnitten von Ebenen, welche je einer der Hauptachsen parallel sind, und mit den andern die durch die Formeln 4) und ihre entsprechenden bestimmten Winkel einschliefsen: Die Winkel zweier zur selben Achse gehöriger nicht paralleler Ebenen werden durch die beiden andern Achsen halbiert.

Aufgabe 7. Die Formeln 4) mittels der Kugel als Spezialfläche zu finden.

Es müssen G(s) und E(s) $\{ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$, oder, wenn wir von der Konstanten δ absehen, G(s) und $\alpha x + \beta y + \gamma z$ so kombiniert werden können, daſs die Kugelform $a x^2 + a y^2 + a z^2 + \ldots$ herauskommt. Da die Produkte den Koeffizienten 0 haben, muſs eine der α, β, γ verschwinden, z. B. γ, dann ist für alle Punkte von E $\alpha^2 x^2 = \beta^2 y^2$, und es wird $G(s) + (\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2)$ zur Kugelform, wenn

$$\lambda_1 + \alpha^2 = \lambda_3;\ \lambda_2 - \beta^2 = \lambda_3;\ \text{also}\ \alpha^2 = \lambda_3 - \lambda_1;$$
$$\beta^2 = \lambda_2 - \lambda_3;\ \alpha^2 + \beta^2 = \lambda_2 - \lambda_1;$$

d. h. aber 4)
$$b_{13}^2 = (\lambda_3 - \lambda_1) : (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Aufgabe 8. Den Radius des Kreisschnitts zu bestimmen mittels der Kugel.

Sei die Ebene $\alpha x + \beta y + \delta$ wie Aufgabe 7, so läſst sich durch den Schnittkreis die Kugel legen, deren Mitte auf der y-Achse liegt bezw. auf der x-Achse (wodurch bewiesen ist, daſs das Centrum des Schnittkreises auf der z-Ebene). Die Gleichung dieser Kugel ist

$$K \{ G(s) + (\alpha x + \beta y + \delta)(\alpha x - \beta y - \delta) \{ x^2 + y^2 + z^2$$
$$- \frac{2 \beta y \delta}{\lambda_3} - \frac{\delta^2 + 1}{\lambda_3} = 0,$$

wo α und β wie in Aufgabe 7 bestimmt sind. Für das Kugelcentrum haben wir $x_c = 0$; $y_c = \frac{\beta \delta}{\lambda_3}$; $z_c = 0$, für den Radius $r^2 = \frac{1 + \delta^2}{\lambda_3} + \frac{\beta^2 \delta^2}{\lambda_3}$. Bringen wir die Ebene auf die Hessesche Form, so ist $\beta = b_{23} \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}$; $\delta = - d \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}$, also $r^2 = \frac{\lambda_3 + \delta^2 \lambda_2}{\lambda_3^2}$. Das Centrum M_1 des Schnitts ist $\{ x = \frac{d\, b_{13} \lambda_2}{\lambda_3}$; $y = \frac{d\, b_{23} \lambda_1}{\lambda_3}$; $z = 0$, also haben wir für den Radius ϱ des Schnittkreises $\varrho^2 = r^2 - K M_1^2$; das giebt

$$\varrho^2 = \frac{\lambda_3 - d^2 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3^2}. \tag{5}$$

Aufgabe 9. Den Radius des Schnittkreises vermittelst des Cylinders zu bestimmen.

Da $b_{22} = 0$, die Cylinderachse auf der z-Achse senkrecht, so brauchen wir nur die x-Achse um den Winkel, dessen Kosinus b_{13} ist, zu drehen, setzen also:

$$x = b_{13}\,\xi - b_{23}\,\eta; \quad y = b_{23}\,\xi + b_{13}\,\eta; \quad z = z,$$

wodurch die ξ-Achse in die Richtung der Cylinderachse und das Koordinatensystem rechtwinklig. Wir erhalten dann, da $a_{12} = - b_{13}\, b_{23}\, \lambda_3$ ist $(H\{2u,\ 2v,\ 2w,\ -2\delta)$

$$\lambda_3 z^2 + \lambda_3 \eta^2 + 2\xi(-\delta - d\vartheta) + 2\eta(u\,b_{23} - v\,b_{13})\,d - 1 + 2\,d\,\delta.$$

Der Koeffizient von ξ ist 0, da nach § 17, 7) $-2\delta = d\,2\vartheta$, d. h.



6) $$2\,\delta = d\,(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3).$$

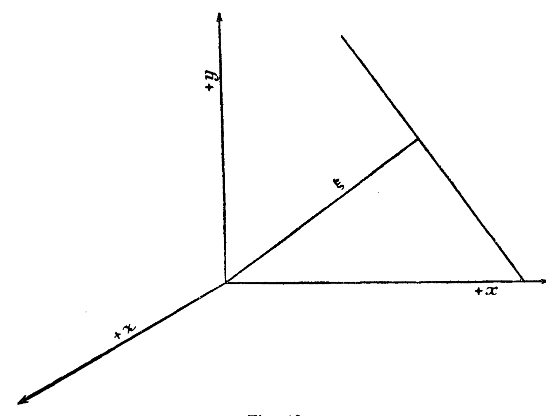


Fig. 10.

Ferner ist $u\,b_{23} - v\,b_{13}$, da $2\,b_{23}\,v = a_{22} - \lambda_2$ etc., gleich $b_{13}\,b_{23}\,(\lambda_2 - \lambda_1)$ gleich $\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} = \nu$ also

7) $$C = \lambda_3 z^2 + \lambda_3 \eta^2 + 2\,\eta\,d\,\nu - 1 + 2\,d\,\delta = 0,$$

also $$\varrho^2 = \frac{1 - 2\,d\,\delta}{\lambda_3} + \frac{d^2\,\nu^2}{\lambda_3^2} = \frac{\lambda_3 - d^2\,\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_3^2}.$$

Aufgabe 10. Aus Gleichung 7) die Koordinaten der Mitte des Schnittkreises abzuleiten.

Es ist $\eta_c = \dfrac{d\,\nu}{\lambda_3}$ und wie die Fig. 10 zeigt $\xi_c = d$, ferner $z_c = 0$, also $x_c = \ldots\ldots$

Aufgabe 11. Wann sind die Kreisschnitte reell?

Die Formeln 4) zeigen, dafs abgesehen von der Kugel und dem Kugelkegel nur zwei der Scharen reell sind, und zwar gehören sie zur selben Achse, damit unsere Formeln diese darstellen, mufs λ_3 zur mittleren Achse gehören.

Aber auch diese reellen Schnitte geben imaginäre Kreise, wenn d^2, d. i. das Quadrat des Abstandes der Schnittebene vom Centrum, gröfser ist als $\lambda_3 : \lambda_1 \lambda_2$. Für den Grenzfall d_0 werden die Schnittebenen zu Tangentialebenen, der Kreis wird zum Nullkreis. Die vier durch die Gleichungen des Centrums und $d = d_0$ bestimmten Punkte heifsen die Kreispunkte der Fläche.

Aufgabe 12. Wann werden die vier Kreispunkte imaginär?

(Sobald eine ungerade Anzahl $\lambda < 0$).

Aufgabe 13. Die Kreisschnitte auf den Rotationsflächen.

Hier ist die Rotationsachse stets die mittlere, die beiden Scharen fallen zusammen, die Kreispunkte in die Enden der Rotationsachse (falls diese Endpunkte hat).

---

§ 19. Die Reyeschen Achsen für die Hauptform.

Die Grundbedingung der Achsen (§ 7, 3) geht, wenn G (s) die Hauptform ist, über in

$$1) \qquad \frac{aA}{\lambda_1} + \frac{bB}{\lambda_2} + \frac{cC}{\lambda_3} = 0$$

oder mit Benutzung der Identität $aA + .. = 0$, wenn $\frac{-c}{B} = p$ und $\frac{b}{C} = q$ ist in $\frac{p}{q} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\frac{cC}{bB} = \frac{aA}{bB} + 1$; wird $\lambda_1^{-1} = \alpha^2$, $\lambda_2^{-1} = \beta^2$, $\lambda_3^{-1} = \gamma^2$ gesetzt, so ist

$$2) \qquad \frac{p}{q} = -\frac{cC}{bB} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = \text{Konst.}$$

Die Gleichungen 1) und 2) zeigen, dafs der Achsenkomplex der F^2 nicht nur identisch für alle F^2 desselben

Asymptotenkegels, sondern auch ungeändert bleibt, wenn die Gröfsen λ^{-1} alle um dieselbe Zahl geändert werden. Diese Flächen heifsen nach Analogie der Ebene konfokal. Die Pole dagegen verschieben sich in diesem Falle, denn wir erhalten für sie

$$3)\quad x' = \frac{p\,\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_3\,q}{\lambda_3 - \lambda_1};\quad y' = \frac{\lambda_1\,p}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot\frac{B}{A};$$

$$z' = \frac{\lambda_3\,q}{\lambda_3 - \lambda_1}\cdot\frac{C}{A}$$

bezw.

$$3a)\qquad x' = \frac{\lambda}{\alpha_{44}}\cdot\tau_1\,(a\,b\,c)\ \text{etc.}$$

und $\frac{\lambda}{\alpha_{44}}$ nach § 7 Aufgabe 6 $= \frac{-B}{a\,c\,\lambda_2\,(\lambda_3 - \lambda_1)}$.

Aufgabe 1. Die Gleichung der Achsen (Normalen) für die Hauptform.

Aufgabe 2. Die der Achse konjugierte Ebene ist für alle konfokalen Flächen dieselbe, also ändern sich für die konfokalen Flächen die Fufspunkte nicht.

Die Gleichung der Polarebene (§ 7 Aufgabe 17) geht über in

$$4)\quad a\,x + b\,y + c\,z - \frac{a\,b}{C}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Aufgabe 3. Die Gleichung 2) geometrisch zu interpretieren.

Die Fig. 15 des Teil 1 zeigt, dafs eine Gerade, welche eine der Koordinatenebenen, z. B. die z-Ebene, in C, eine andere, z. B. die y-Ebene, in B schneidet, dann Achse ist, wenn die Projektionen von OC und OB auf die drei Achsen im konstanten Verhältnis $\beta^2 - \alpha^2 : \gamma^2 - \alpha^2$ stehen.

Aufgabe 4. Die Hauptachsengleichung des Achsenkegels durch den Punkt P'.

(Das Glied mit λ^2 fehlt.)

Aufgabe 5. Die sämtlichen mit der gegebenen Fläche koaxialen aufzustellen.

Die homothetischen bilden eine Schar, die konfokalen eine andere. Die Fläche α'^2 etc. ist koaxial, wenn die Gleichung 1) bezw. 2) bestehen bleibt, d. h. also, wenn

$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\gamma'^2 - \alpha'^2} = k$ ist. Dadurch ist eine der Achsen z. B. β' bestimmt und wir erhalten als allgemeine Form der koaxialen Flächen:

$$5) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 + k(\gamma^2 - \alpha^2)} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0,$$

wo α und γ ganz beliebig sind, d. h. also die Anzahl der koaxialen Flächen ist zweifach unendlich. k ist durch die gegebene Fläche bestimmt.

Aufgabe 6. Die Flächen F^2, welche je zwei Achsengleichungen darstellen, sind für die Hauptform Cylinder.

Aufgabe 7. Die Kurve dritten Grades, auf der die Pole des Achsenkegels eines festen Punktes liegen, läfst sich durch die Gleichungen bestimmen:

$$\frac{x - \xi}{x \lambda_1} = \frac{y - \eta}{y \lambda_2} = \frac{z - \zeta}{z \lambda_3}.$$

Aufgabe 8. Den zerfallenden Kegel eines Punktes einer Symmetrieebene, z. B. $y = 0$ darzustellen.

Wir erhalten $b(a \zeta \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) + c \xi \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3)) = 0$, also die Ebene $y = 0$ und eine zur y-Achse parallele ε.

Aufgabe 9. Der Ort der Pole dieses Achsenkegels für die Achsen in ε wird die Parallele zur y-Achse $x = \lambda_1 \beta^2 + \xi$; $z = \lambda_3 \beta^2 + \zeta$.

Aufgabe 10. Der Ort der Pole für die Achsen des Kegels in $y = 0$.

Für diese ist die Gröfse $\frac{\lambda}{\alpha_{44}}$ (§ 7 Aufgabe 6) gleich $\frac{-B}{a c \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1)}$ und es ist für den Pol $x = \frac{B}{c} \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}$; $y = 0$; $z = \frac{B}{a} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3}$; also

$$6) \qquad \frac{x}{z} = \frac{a}{c} \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{x - \xi}{z - \zeta}.$$

Der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, die durch P und M geht, und deren Asymptoten den beiden Hauptachsen der Symmetrieebene parallel sind. (Hyperbel des Apollonius; S. S. VIII S. 235.)

Das Centrum hat die Koordinaten $u = -\xi \lambda_3 : (\lambda_1 - \lambda_3)$; $v = \zeta \lambda_1 : (\lambda_1 - \lambda_3)$.

Aufgabe 11. Den Ort der Fufspunkte dieses Achsenkegels zu bestimmen, welche in der Symmetrieebene liegen.

Wir haben nach § 7 Aufgabe 15 für einen solchen Punkt, wenn x' der Pol, $x' = \frac{x}{1 + \lambda \lambda_1}$, $y = 0$, $z' = \frac{z}{1 + \lambda \lambda_1}$. Aus 6) erhalten wir $\lambda = (xz(\lambda_1 - \lambda_3) - x\zeta\lambda_1 + z\xi\lambda_3) : \lambda_1 \lambda_3 B$, wo $B = x\zeta - z\xi$. Die Gleichung der Polarebene $x\sigma(x') + ..$ giebt, da $y = 0$

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda} = 1 = \frac{x^2 B \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_3 \alpha^2 B + n} + \dots$$

$$7) \quad \frac{xB}{(\gamma^2 - \alpha^2)(z - \zeta)} + \frac{zB}{(\gamma^2 - \alpha^2)(x - \xi)} - 1 = 0.$$

Der Ort der Fufspunkte der Achsen eines beliebigen Punktes der Symmetrieebene ist eine Kurve dritten Grades, welche zweimal durch den Punkt selbst geht.

Aufgabe 12. Der Ort der Fufspunkte der Achsen des singulären Kegels in der Ebene ε ist ein Kreis, der durch den Punkt $\xi 0 \zeta$ geht und zur y-Ebene symmetrisch liegt (Schilke l. c.).

Herr Schilke hat l. c. mittelst dieses Kreises und den Hauptachsen die Konstruktion des Achsenkomplexes gegeben, wenn eine Achse und ihr Fufspunkt gegeben. Der Achsenkomplex ist völlig bestimmt durch die drei Hauptachsen und eine Achse aufserhalb der Hauptebenen.

Aufgabe 13. Die Verbindungslinie zweier Pole des Achsenkegels eines Punktes ist wieder eine Achse.

Aufgabe 14. Jeder Punkt im Raume ist Fufspunkt von drei Achsen, welche aufeinander senkrecht stehen.

Wir haben (§ 7 Aufgabe 15) $x' = \frac{x}{1 + \lambda \lambda_1}$ etc. und aus der Gleichung der Polarebene $\frac{x^2 \lambda_1}{1 + \lambda \lambda_1} + \dots = 0$ oder

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

Das ist die Gleichung einer der gegebenen konfokalen Fläche und giebt für λ eine Gleichung dritten Grades mit drei reellen Wurzeln, wie wir im folgenden Paragraphen beweisen werden. Unterscheidet man zwei von den Wurzeln durch p und q, so ist $a = x - x'_p$, $a' = x - x'_q$ und daher $a = \frac{x \lambda_1 p}{1 + p \lambda_1}$, $a = \frac{x p}{\alpha^2 + p}$, ebenso $a' = \frac{x q}{\alpha^2 + q}$, also der Kosinus des Winkels beider Achsen proportional

$$p q \left(\frac{x^2}{(\alpha^2 + p)(\alpha^2 + q)} + \frac{y^2}{(\beta^2 + p)(\beta^2 + q)} + \ldots \right),$$

aber diese Gröfse ist nichts anderes als das Resultat der Subtraktion von $\frac{x^2}{\alpha^2 + p} + \ldots = 0$ und $\frac{x^2}{\alpha^2 + q} + \ldots = 0$, also selbst Null. Der Satz gilt auch noch, wenn p oder q gleich 0, d. h. der gegebene Punkt auf der Fläche.

Aufgabe 15. Alle Achsen, welche in einer beliebigen Ebene liegen, umhüllen eine Parabel (Schilke l. c.).

Aufgabe 16. Eine Achse und die Polarebene ihres Poles schneiden jede Symmetrieebene in Pol und Polare eines in der Ebene liegenden festen Kegelschnittes.

Die Achse schneidet z. B. die y-Ebene in $\eta = 0$, $\xi = \frac{x' (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2}$, $\zeta = \frac{z' (\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2}$ $\{$ A. Die der Achse konjugierte Ebene $\lambda_1 x x' + \ldots = 0$ in der Geraden

$$g \left\{ x x' \lambda_1 + z z' \lambda_3 = 0 \right\{ \frac{x \xi}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z \zeta}{\gamma^2 - \beta^2} - 1 = 0,$$

d. h. aber A und g sind Pol und Polare für die konstante C^2

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2 - \beta^2} - 1 = 0.$$

Aufgabe 17. Der Ort der Fufspunkte eines beliebigen Achsenkegels ist eine Raumkurve fünften Grades.

Dies folgt schon daraus, dafs die Kurve für den speziellen Fall $\eta = 0$ in eine Kurve dritten und zweiten Grades zerfiel; soll aber durch Rechnung festgestellt werden.

Aufgabe 18. Alle Achsenkegel, deren Spitzen auf einer Parallelen zu einer Hauptachse liegen,

schneiden die betreffende Symmetrieebene in derselben gleichseitigen Hyperbel.

Sie geht durch M und den Schnitt der Parallelen mit der Hauptebene.

Aufgabe 19. Durch Rechnung nachzuweisen, dafs diese Hyperbeln für alle koaxialen Flächen konstant.

Aufgabe 20. Die Orte in Aufgabe 18, 10, 11 für die Rotationsfläche $\alpha = \gamma$ zu untersuchen.

Aufgabe 21. Dieselbe Aufgabe für die Schar der koaxialen Kegel. (In 5) ist das konstante Glied -1 durch 0 zu ersetzen.)

---

§ 20. Brennpunkts-Eigenschaften der centralen Flächen zweiten Grades.

Die Kurven, auf welche wir in Aufgabe 16 stiefsen, nennen wir die Fokalkurven der Fläche F^2. Setzen wir $\lambda_1^{-1} = A$, $\lambda_2^{-1} = B$, $\lambda_3^{-1} = C$, so sind ihre Gleichungen:

$$1) \qquad C_y^2 = \frac{x^2}{A - B} + \frac{z^2}{C - B} = 1,$$

$$C_z^2 = \frac{y^2}{B - C} + \frac{x^2}{A - C} = 1$$

und entsprechend C_x^2. Setzt man fest, dafs bei dreiachsigen Flächen $A > C > B$, so ist die Fokalkurve in $y = 0$ eine Ellipse, die Fokalkurve in $z = 0$ eine Hyperbel, die Fokalkurve in $x = 0$ imaginär. Dabei ist $A > 0$ vorausgesetzt.

Sind zwei λ gleich, z. B. λ_2 und λ_3, so arten die reellen Kurven in zwei der Rotationsachse parallele Geraden aus; bei der Kugel ist das Centrum der einzige reelle Punkt.

Mit Herrn Staude (die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Leipzig 1896) bezeichnen wir die reellen Brennpunkte der Hauptschnitte als die Hauptbrennpunkte der F^2.

Aufgabe 1. Jede Fokalkurve hat ein Paar Hauptbrennpunkte zu Scheiteln und ein zweites zu Brennpunkten.

Die Fokalellipse in der Ebene $y = 0$ geht durch die Brennpunkte des Schnitts $y = 0$, und hat die Brennpunkte

des Schnitts $z = 0$ zu Brennpunkten (s. Fig. 11). Die imaginäre C_x^2 hat die reellen Brennpunkte mit $x = 0$ gemein.

Aufgabe 2. Die Ebene, welche im Berührungspunkte einer Tangente der Fokalkurve auf der Tangente senkrecht steht, schneidet die Schar konfokaler Flächen in Kegelschnitten, deren einer Brennpunkt der Berührungspunkt ist.

Legt man durch die Tangente in einem Punkte, z. B. $P\{x'z'$ der Fokalkurve C_y^2, irgend eine Ebene ε_k, so steht die Achse a_k dieser Ebene nach Definition der Fokalkurve in Aufgabe 16 des Paragraphen 19 auf ε_k in P senkrecht. Daher liegt der Pol P_k der Ebene ε_k auf a_k. Alle diese Reyeschen Achsen a_k bilden aber die in P auf der Tangente und damit auf der Fokalkurve senkrechte Ebene ν. Die Ebene ν schneidet die F^2 und jede ihr konfokale in einem Kegelschnitt C^2 und der Pol jeder Sehne von C^2 durch P liegt auf der zugehörigen Achse a_k.

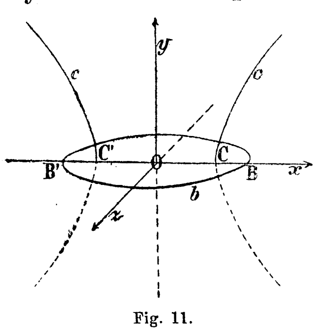


Fig. 11.

Es steht also die Linie, welche P mit dem Pol verbindet, auf der Sehne senkrecht, d. h. aber (S. S. VIII § 35) P ist der Fokus des Schnitts C^2. Von dieser Eigenschaft hat die Fokallinie den Namen; wir nennen nach Staude l. c. jeden ihrer Punkte Brennpunkt (Fokus) der F^2.

Aufgabe 3. Den Satz sub Aufgabe 2 zu errechnen.

Wir verlegen den Anfangspunkt nach $x'y'$ und haben in die Gleichung der Fläche zu setzen:

$$x = -\zeta\frac{w}{n} + x', \quad y = \xi, \quad z = \zeta\frac{u}{n} + z',$$

wo $u = x' : A - B$, $w = z' : C - B$ und $n^2 = u^2 + w^2$ ist.

Aufgabe 4. Die Gleichung der Fokalkegel.

Unter Fokalkegel versteht man den Kegel, dessen Spitze ein beliebiger Raumpunkt $P\{\xi$ und dessen Erzeugende oder Kante eine Fokalkurve durchläuft. Nennen wir die grofsen Strahlenkoordinaten einer Kegelkante $A'B'C'$, so ist

$$x' = -\frac{C'}{b}, \ z' = \frac{A'}{b}, \ y' = 0$$

und somit für die Fokalellipsenkegel

$$2) \quad \frac{(\eta x - \xi y)^2}{A - B} + \frac{(\zeta y - \eta z)^2}{C - B} - (y - \eta)^2 = 0.$$

Aufgabe 5. Was wird aus 2), wenn $y = 0$ ist?

Wir erhalten $y^2 C_y^2 (\xi \zeta) = 0$. Liegt also die Spitze nicht auf der C_y^2, so ist der Kegel ausgeartet in die (Doppel)-Ebene $y^2 = 0$. Liegt die Spitze auf der C_y^2, so ist die Gleichung von jedem Punkt des Raumes erfüllt. Die geometrische Definition veranlaſste Herrn Staude auch in diesem Falle, den Fokalkegel als das ebene Strahlenbündel in P zu betrachten.

Aufgabe 6. Liegt die Spitze P eines Kegels auf einer Fokalkurve, so sind die Kegel über den beiden andern Fokalkurven Rotationskegel, deren Rotationsachse die Tangente an die Fokalkurve in P ist (Staude l. c.)

Der Kegel z. B. über der imaginären Kurve ist:

$$\frac{(y^2 \xi^2)}{B - A} + \frac{(z \zeta - x \xi)^2}{C - A} - (x - \xi)^2 = 0;$$

man überzeugt sich leicht, daſs unsere Bedingungen aus § 7 $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{23}}{b_{23}}$ etc. erfüllt sind, da $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $b_{13} = 0$ etc.

Aufgabe 7. Die Flächen der konfokalen Schar zu klassifizieren. Die Schar a) $\frac{x^2}{A + p} + \frac{y^2}{B + p} + \frac{z^2}{C + p} = 1$ hat identische Fokalkurven und Kegel, sie hat denselben Achsenkomplex, die Fuſspunkte sind identisch, die Koordinaten der Pole haben gleiches Verhältnis. Man kann von jeder beliebigen Fläche ausgehn und daher annehmen, daſs A, B, C positiv sind und p die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen.

1) $p = -\infty$, dann sind $A + p$, $B + p$, $C + p$ alle gleich p und a) geht über in $x^2 + y^2 + z^2 = p$ und stellt eine Kugel mit unendlich groſsem imaginären Radius dar.

2) p zwischen $-\infty$ und $-A$, es sind alle drei Hauptachsen λ negativ, die Flächen sind imaginäre Ellipsoide.

3) Ist $p = -A$, so wird die Fläche, mit der von der imaginären Fokalkurve begrenzten Doppelebene $x = 0$ identifiziert.

4) Ist p zwischen $-A$ und $-C$, so sind die Flächen, da zwei Hauptachsen λ negativ sind, zweischalige Hyperboloide.

5) p gleich $-C$, dann soll die Fläche die von der Fokalhyperbel C_z^2 begrenzte Doppelebene $z = 0$ sein, und zwar rechnen wir den Teil der Ebene, in der die Brennpunkte liegen, als zweischaliges Hyperboloid, den andern als einschaliges, die Grenzkurve selbst als zu beiden gehörig.

6) p zwischen $-C$ und $-B$; eine Achse negativ, die Flächen sind einschalige Hyperboloide.

7) p gleich $-B$, die Fläche soll in die Doppelebene $y = 0$ übergehen und zwar für jeden Punkt im Äufsern soll die Fokalellipse als einschaliges Hyperboloid, für jeden im Innern als Ellipsoid für die Punkte auf der Fokalkurve zu beiden gezählt werden.

8) p zwischen $-B$ und $+\infty$, alle drei Hauptachsen positiv, Ellipsoide.

9) p gleich $+\infty$, alle drei Hauptachsen gleich, $x^2 + y^2 + z^2 = p$, und die Flächen endigen als Kugel mit unendlich grofsem Radius.

Die Gleichung a) haben wir schon in Aufgabe 14 § 19 getroffen; sie sagte aus, dafs jeder Punkt x Fufspunkt dreier aufeinander senkrechter Achsen war, jetzt zeigt sie, dafs generaliter durch jeden Punkt im Raum drei Flächen des konfokalen Systems gehen können.

Aufgabe 8. Die Gleichung a) hat drei reelle Wurzeln.

Wir bringen a) in die Form

$$L = (A + p)(B + p)(C + p) - \Sigma x^2 (B + p)(C + p) = 0.$$

Für $p = +\infty$ wird L positiv, für p gleich $-B$ ist L negativ, für $p = -C$ ist L positiv, für p gleich $-A$ ist L negativ, und bleibt es, wenn $p < -A$ wird, also (Pund, Algebra, S. S. VI) liegt eine Wurzel zwischen $+\infty$ und $-B$, eine zweite zwischen $-B$ und $-C$, eine dritte zwischen $-C$ und $-A$.

Liegt der gegebene Punkt auf einer Symmetrieebene, z. B. $y = 0$, so sondert sich aus L der Faktor $(B + p)$ ab, und eine Wurzel fällt mit einer der Grenzen zusammen; wir rechnen daher die ganze Ebene der Fokalkurven zu den Flächen der Schar und zwar die Fokalellipse zu den Ellipsoiden, die Fokalhyperbel zu den einschaligen Hyperboloiden.

Wir haben dann den Satz:

Durch jeden Punkt im Raum gehen drei und nur drei konfokale Flächen der Schaar, von jeder Art je eine.

Aufgabe 9. Zwei konfokale Flächen verschiedener Art haben stets eine reelle Schnittkurve.

Der Satz ist für Ellipsoid und Hyperboloid auschaulich klar. Es sei $\frac{x^2}{A + p} + \ldots = 0$ ein einschaliges Hyperboloid, d. h. p zwischen $-C$ und $-B$ und $\frac{x^2}{A + q} + \ldots = 0$ ein zweischaliges, d. h. q zwischen $-C$ und $-A$. Subtrahiert man die beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung des vorigen Paragraphen S. 112, oder $x^2 u - z^2 v + y^2 w = 0$, wo u, v, w nicht kleiner 0 sind, oder $z^2 = x^2 u' + y^2 w'$, wo u' und w' generaliter > 0, jedenfalls nicht < 0 sind. Die erste Gleichung giebt dann $x^2 \mu + y^2 \nu = 1$, wo μ sicher positiv und ν sicher nicht negativ. Diese Gleichung wird aber von allen Punkten der Ellipse mit den Achsen $\sqrt{\mu^{-1}}$ und $\sqrt{\nu^{-1}}$ erfüllt. Also:

Zwei konfokale Centralflächen verschiedener Art schneiden sich in einer Kurve, deren Projektionen auf die Hauptebenen Kegelschnitte sind, deren Centrum das Centrum der Flächen und deren Hauptachsen in die Hauptachsen der Flächen fallen.

Aufgabe 10. Hauptsatz: **Die drei konfokalen Flächen desselben Punktes schneiden sich rechtwinklig.**

Die Gleichung a) zeigt, da $\frac{x}{A + p}$ etc. die Richtungsfaktoren der Tangentialebene im Punkte x sind, dafs je zwei Konfokale sich längs ihrer Schnittkurve rechtwinklig schneiden; im übrigen siehe den Beweis von Aufgabe 14 des § 19.

Die drei Achsen, welche im Punkte P ihren Fufspunkt

haben, sind die Normalen der drei konfokalen Flächen in P; in ihnen schneiden sich die drei Tangentialebenen, in P die drei Flächen, und wir können als ihre positiven Richtungen die Richtung von den Flächen weg bezeichnen.

Das System konfokaler Flächen ungleicher Achsen hat also dieselbe Eigenschaft wie das System der orthogonalen Koordinatenebenen; *es teilt den Raum in unendlich kleine rechtwinklige Balken*. Daher haben *Lamé* und *Jacobi* die drei zu jedem Punkt gehörigen Werte des p zu Koordinaten des Punktes gemacht, die sog. *Elliptischen Koordinaten*, ein krummliniges Koordinatensystem, das sich für theoretische Physik und Integralrechnung als äufserst brauchbar erwiesen.

Die Gleichung $L = 0$ bestimmt zu jedem Punkt seine elliptischen Koordinaten, von denen, wie bewiesen, p zwischen $+\infty$ und $-B$ (Ellipsoide), q zwischen $-B$ und $-C$ (Einschaliges Hyperboloid), r zwischen $-C$ und $-A$ (Zweischaliges Hyperboloid) liegen mufs, falls P ein reeller Punkt ist. Die Elliptischen Koordinaten sind also beschränkt.

Aufgabe 11. Aus den Elliptischen Koordinaten eines Punktes seine orthogonalen zu bestimmen.

Es ist, wenn das variable p in L mit t bezeichnet wird, L mit dem Produkt $(t - p)(t - q)(t - r)$ identisch, wo p q r die Wurzeln von $L = 0$ (*Pund*, Algebra) also

$$p\,q\,r = \Sigma x^2 B C - A B C;$$
$$p + q + r = x^2 + y^2 + z^2 - (A + B + C);$$
$$p\,q + q\,r + r\,p = \Sigma A B - \Sigma x^2 (B + C).$$

Es ist, wenn $t = -B$ ist, $L(-B) = (-B - p)(-B - q)(-B - r) = -y^2 (A - B)(C - B)$, also

$$y^2 = -\frac{L(-B)}{(A - B)(C - B)}; \quad x^2 = -\frac{L(-A)}{(B - A)(C - A)};$$
$$z^2 = -\frac{(L - C)}{(A - C)(B - C)}.$$

Da x^2, y^2, z^2 nicht < 0 sein dürfen, so ergeben sich die schon bekannten Beschränkungen für p, q, r aufs neue.

Man sieht, dafs zu einem Wertsystem p q r generaliter 8 Punkte gehören, d. h.:

Drei verschiedenartige konfokale centrale Flächen schneiden sich in 8 Punkten.

Soll der Punkt durch seine elliptischen Koordinaten (eindeutig) bestimmt werden, so müssen auch hier die verschiedenen Oktanten durch Festsetzung der Wurzelzeichen für $\sqrt{A - B}$ etc. gekennzeichnet werden.

Aufgabe 12. Die Flächen $p + q + r =$ Konstans, $p q r =$ Konst., $\Sigma p q =$ Konst.

1) Kugel $R^2 = (A + B + C + K)$, 2) ein Ellipsoid, das mit dem gegebenen homothetisch, 3) ein Ellipsoid mit gleichem Centrum und Hauptebenen wie die Grundfläche.

Aufgabe 13. Die Elliptischen Koordinaten eines Punktes der Fokalkurve.

Für C_y^2 ist p gleich $-B$, aber auch q gleich $-B$, die dritte Wurzel $(x^2 + z^2 + B - (A + C)$ liegt zwischen $-C$ und $-A$.

Für C_z^2 ist q gleich $-C$, aber auch p gleich $-C$, die dritte Wurzel p ist gröſser als $-B$.

Aufgabe 14. Den Verlauf der Flächen zu untersuchen, wenn zwei bezw. drei der Hauptachsen gleich sind.

Aufgabe 15 Die Fokalellipse schneidet die zweischaligen Hyperboloide der Schar in ihren Kreispunkten.

Wir haben für einen Punkt der Fokalellipse

$$x^2 = \frac{(-A - r)(A - B)}{C - A}; \quad y^2 = 0; \quad z^2 = \frac{(-C - r)(C - B)}{A - C}.$$

Aufgabe 16. Die Fokalhyperbel schneidet die Ellipsoide der Schar in ihren Kreispunkten.

Für C_z^2 ist

$$x^2 = -\frac{(-A - p)(C - A)}{B - A}; \quad y^2 = -\frac{(-B - p)(-B + C)}{A - B};$$
$$z = 0.$$

Aufgabe 17. Die Entfernung eines Punktes der Fokalellipse bezw. -Hyperbel vom Centrum in Elliptischen Koordinaten.

Die Gleichung $\frac{x^2}{A + p} + \frac{y^2}{B + p} + \frac{z^2}{C + p} = 1$ giebt für die dritte Wurzel

$r = (x^2 + z^2 + B - (A + C)$, also $x^2 + z^2 = r + (A + C - B)$, ebenso

$$x'^2 + y'^2 = p + (A - C + B).$$

Diese Formeln führen unmittelbar auf die Sätze von Dupin.

Aufgabe 18. Die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Fokalellipse von zwei beliebigen aber festen Punkten auf je einem Zweige der Fokalhyperbel ist konstant.

Ist P ein Punkt der Hyperbel, R ein Punkt der Ellipse, so ist

$$\overline{PR}^2 = x^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx'$$
$$= p + r + 2A - 2\sqrt{-A-p}\sqrt{-A-r},$$

also

$$PR^2 = -1(-A - p + (-A - r) + 2\sqrt{})$$
$$PR = i\sqrt{-A-p} + i\sqrt{-A-r}$$

oder

$$PR = \sqrt{A+p} \pm \sqrt{A+r}.$$

Fig. 12.

Die Zeichen der Wurzel bestimmen sich, je nachdem die beiden Punkte auf entgegengesetzten oder gleichen Seiten der dritten Symmetrieebene liegen. Ist nun P′ ein zweiter Punkt der Fokalhyperbel, aber auf dem entgegengesetzten Zweige, so haben wir $P'R = \sqrt{A+p'} \mp \sqrt{A+r}$ und damit den Satz erwiesen; die Zeichenbestimmung erfolgt schon durch den Spezialfall, siehe Fig. 12 E C E′.

Aufgabe 19. Zweiter Satz von Dupin. Die Differenz der Abstände eines jeden Punktes der Fokal-Ellipse von zwei beliebigen aber festen Punkten der Hyperbel auf demselben Zweige ist konstant.

Aufgabe 20. Dritter Satz von Dupin. Die Differenz der Abstände eines jeden Punkts der Fokalhyperbel von zwei festen Punkten der Fokalellipse ist ihrem absoluten Betrage nach konstant.

Aufgabe 21. Die 3 Dupinschen Sätze ohne Elliptische Koordinaten zu beweisen.

Man erinnere sich (S. S. VIII) der Substitution $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$ für die Ellipse etc.

Über die weiteren Fokaleigenschaften der Centralflächen, insbesondere die Fadenkonstruktion des Ellipsoides, siehe die erwähnte Schrift von Staude.

V. Abschnitt.

Die centralen Flächen zweiten Grades in spezieller Behandlung.

§ 21. Das Ellipsoid.

Seine Gleichung ist

$$1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

wo A, B, C positiv, sein Asymptotenkegel ist imaginär. Die Gröfsen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ heifsen die Halbachsen der Fläche (s. Fig. 13 und 14). Spezielle Flächen sind das gewöhnliche Rotationsellipsoid $B = C$, das abgeplattete Rotationsellipsoid $A = C$ und die Kugel $A = B = C$.

Die Hauptschnitte, d. h. die Schnitte durch je zwei Hauptachsen sind Ellipsen. Bewegt sich die schneidende Ebene parallel zum Hauptschnitt, so werden die Schnitte ähnliche Ellipsen mit beständig kleiner werdenden Achsen, ist $x = \pm \sqrt{A}$, so werden die Schnitte parallel zur x-Ebene, zu Ellipsen mit den Halbachsen 0, d. h. sie werden zu Punkten $x = \pm \sqrt{A}$, $y = 0$, $z = 0$, sie heifsen Scheitel, deren das Ellipsoid in den Endpunkten der Achsen sechs hat. Ist der Abstand dem absoluten Betrage nach gröfser als die zugehörige Halbachse, so werden die Schnitte imaginär. Das Ellipsoid liegt also ganz innerhalb eines geraden Parallelepipedons, dessen Ecken die Koordinaten $+\sqrt{A}$, $+\sqrt{B}$, $+\sqrt{C}$; $+\sqrt{A}$, $+\sqrt{B}$, $-\sqrt{C}$; ..., $-\sqrt{A}$, $-\sqrt{B}$, $-\sqrt{C}$ haben, und berührt die Seitenflächen desselben in den Scheiteln, welche die Symmetriepunkte der Seitenflächen sind.

Der Punkt M $\{ 0, 0, 0$ ist Centrum im eigentlichen Sinne, d. h. in M wird jede Sehne halbiert, wie ganz direkt aus der Gleichung 1) folgt.

Aufgabe 1. Beweis der Behauptung.

Eine Gerade durch M ist $\{ r \cos \alpha$ etc., also für die Schnittpunkte $r^2 = n^2$, wo $n^2 = 1 : \left(\frac{\cos^2 \alpha}{A}, \ldots \right)$, also $r = \pm n$.

Die Schnitte des Ellipsoids durch eine beliebige Ebene sind Kegelschnitte.

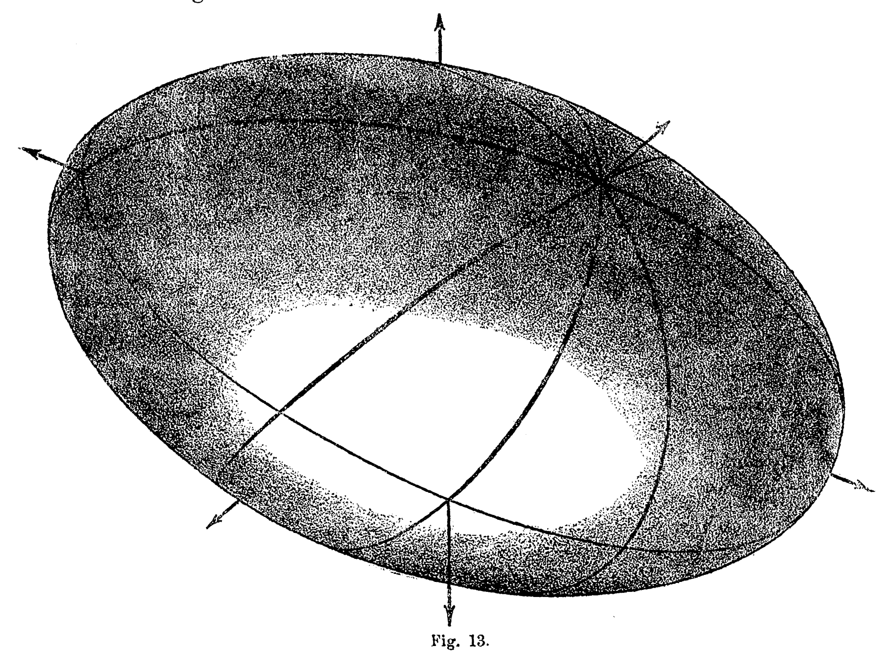


Fig. 13.

Aufgabe 2. Den Schnitt einer beliebigen Ebene $\varepsilon \{ x b_{13} + y b_{23} + z b_{33} + d = 0$ mit dem Ellipsoid.

Aus § 5 oder § 17 folgt, dafs die Centren der Schnittellipsen von ε und aller ihr parallelen auf dem Durchmesser

$$2) \qquad \frac{\lambda_1 x}{b_{13}} = \frac{\lambda_2 y}{b_{23}} = \frac{\lambda_3 z}{b_{33}} = r$$

liegen. Kombinieren wir diese Gleichungen mit ε, so erhalten wir $r = - d : n$, wo $n = A b_{13}^2 + B b_{23}^2 + C b_{33}^2$, und für das Centrum des Schnitts

3) $$x_c = r\, b_{13}\, A \text{ etc.}$$

Die Mittelpunkte sind also stets reell, auch wenn die Schnittkurve imaginär wird.

Aufgabe 3. Wann wird die Schnittlinie imaginär?

a) Aus der Hauptachsengleichung § 17; b) aus der Thatsache, dafs, wenn der Pol innerhalb der Fläche liegt,

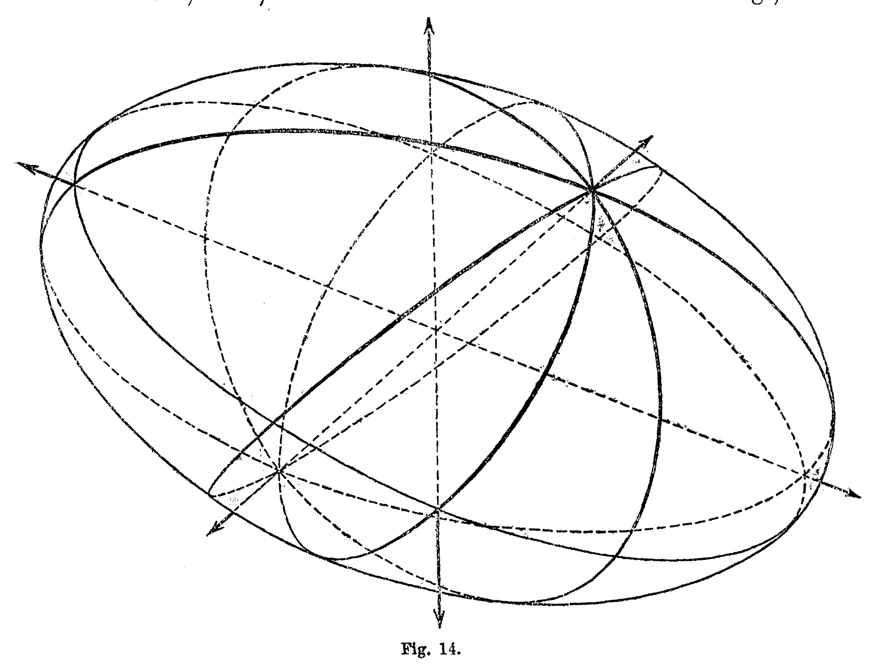


Fig. 14.

die Polare aufserhalb. Der Grenzfall tritt ein, wenn der Pol auf der Fläche, d. h. das Centrum des Schnitts ein Flächenpunkt ist. Dies tritt ein, wenn $d^2 = n$ ist. Ist $d^2 > n$, so ist der Schnitt imaginär.

Aufgabe 4. Die Gleichung eines Schnittes durch Transformation der Koordinaten in die Ebene des Schnittes darzustellen.

Wir transformieren zunächst den Ursprung in das Centrum des Schnittes, indem wir für x etc. setzen $x + r A \alpha$ etc., wenn $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ die Gleichung der schneidenden Ebene ε in Hessescher Form ist. Indem wir dann als ξ-Achse die Schnittlinie von ε und $y = 0$ wählen, und als ζ-Achse die senkrechte in der Ebene, haben wir nach der Fig. 15 zu setzen $x = \xi \cos \varphi + \zeta \cos \vartheta \sin \varphi$; $y = \zeta \sin \vartheta$, $z = \xi \cos \varphi - \zeta \cos \vartheta \cos \varphi$, wo $\cos \vartheta = \beta$ und φ bestimmt ist durch $\operatorname{tg} \varphi = -\alpha : \gamma$, also $\cos \varphi = -\gamma : \sin \beta$ und $\sin \varphi = \alpha : \sin \beta$. Für r ist hier $\delta : (A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2)$ oder $\delta : n$ zu setzen. Wir erhalten

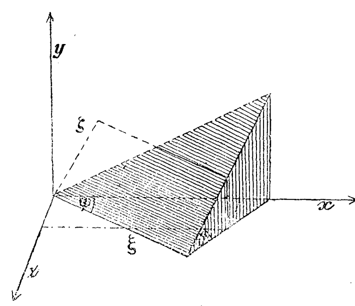


Fig. 15.

$$\ldots \xi^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{A} + \frac{\sin^2 \varphi}{C} \right) + \zeta^2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{A} + \frac{\sin^2 \vartheta}{B} + \frac{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{C} \right) - 2 \zeta \xi \cos \varphi \sin \varphi \cos \vartheta \left(\frac{A - C}{A C} \right) - \left(1 - \frac{\delta^2}{n} \right) = 0.$$

Die Hauptachsengleichung wird nach S. S. VIII § 36

$$L^2 - L (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \Sigma \lambda_1 \alpha^2) + n A B C$$

und stimmt genau mit der von uns § 17 gegebenen [als Probe]. Den Winkel, den die grofse Achse mit der Schnittlinie von ε und $y = 0$ bildet, giebt

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \alpha \beta \gamma (\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \Sigma \lambda_1 \alpha^2}.$$

Die Gleichung des Schnittes wird also $\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 - \left(1 - \frac{\delta^2}{n} \right) = 0$, woraus sich sofort $\delta \leqq n$ für die Realität des Schnittes ergiebt, sowie

Aufgabe 5. Die Gleichung des Ellipsoids in Ebenenkoordinaten.

Ist die Ebene gegeben in allgemeiner Form $ux + \ldots + d = 0$, so ergiebt $\delta = 0$

$$\ldots d^2 = A u^2 + B v^2 + C w^2.$$

Aufgabe 6. Diese Formel aus der allgemeinen $u s_1 + v s_2 + \ldots = 0$ abzuleiten.

Aufgabe 7. Die Koordinaten des Berührungspunktes

$$x = -\frac{uA}{d}; \quad y = -\frac{vB}{d}; \quad z = -\frac{wC}{d}.$$

Aufgabe 8. Den Ähnlichkeitsfaktor der Schnitte geometrisch zu deuten.

Es ist n der Abstand der zur Stellung der Schnittebene gehörigen Tangentialebene vom Centrum M und da $\frac{\delta}{n} < 1$, so ist es der Kosinus eines Winkels ε, und somit ist der Ähnlichkeitsfaktor $\sin \varepsilon$.

Aufgabe 9. Die Gleichung des Ellipsoids in Strahlenkoordinaten.

Aufgabe 10. Die reellen Schnitte des Ellipsoids sind stets Ellipsen.

a) Es sind Kegelschnitte, die keinen Punkt im Unendlichen haben oder b) die Gröfse R des § 17 Gleichung 6 kann weder 0 noch < 0 werden.

Aufgabe 11. An einen Punkt A des Ellipsoids die Tangentialebene zu legen.

Sie ist der zum Durchmesser MA konjugierten Ebene parallel.

Aufgabe 12. Den zu einer Ebene konjugierten Durchmesser zu konstruieren.

Man konstruiere in bekannter Weise das Centrum des Schnittes und verbinde es mit M.

Aufgabe 13. Den Neigungswinkel der Kreisschnitte mit der y-Ebene zu bestimmen.

Wir haben für die Ebene ε eines Kreisschnittes

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0,$$

wo nach § 18

$$\cos^2 \alpha = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad \cos^2 \beta = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad \cos^2 \gamma = 0 = \frac{\lambda_3 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

oder

$$\cos^2\alpha = 0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2};\ \cos^2\beta = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2};\ \cos^2\gamma = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$$

oder

$$\cos^2\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3};\ \cos^2\beta = 0;\ \cos^2\gamma = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

Damit das erste System reelle Werte ergebe, mufs $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$ bezw. $A > C > B$ sein, alle übrigen ergeben dann imaginäre Systeme.

Für den gesuchten Winkel haben wir

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -\sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3}} = -\cot\alpha.$$

Aufgabe 14. Die Kreispunkte des Ellipsoids zu bestimmen.

Wir haben für den Durchmesser, auf dem die Centren der Kreise liegen

$$\frac{x\lambda_1}{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}} = \frac{y\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}};\quad z = 0.$$

Dies ergiebt für die Endpunkte des Durchmessers

$$x_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1)}};\ y_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1)}};\ z = 0$$

$$x_2 = -x_1;\ y_2 = -y_1;\ x_3 = x_1;\ y_3 = -y_1;$$
$$x_4 = -x_3;\ y_4 = -y_3.$$

Diese vier Punkte heifsen die Kreispunkte der Fläche. Ihr Abstand vom Centrum ergiebt sich aus $\delta = n$ bezw. aus § 18 Aufgabe 11 als $\pm\sqrt{\frac{AB}{C}}$.

Aufgabe 15. Die konfokalen Flächen haben wie die homothetischen dieselben Kreisschnitte.

Aufgabe 16. Die Kreisschnittebenen geometrisch zu konstruieren.

Wir haben nun die Gleichung d) § 18 $\lambda_3 = \lambda_1 b_{23}^2 + \lambda_2 b_{13}^2$ geometrisch zu interpretieren, wir geben ihr die Form $\frac{C\cos^2\varphi}{A} + \frac{C\sin^2\varphi}{B} = 1$ und sehen daraus, dafs wir nur in der Ebene des Hauptschnittes x um M mit $\sqrt{C}$ den

Kreis zu schlagen brauchen; das giebt, da $\sqrt{C}$ zwischen $\sqrt{A}$ und $\sqrt{B}$ liegt, zwei Durchmesser, und die Ebene durch je einen Durchmesser und die z-Achse ist ein Kreisschnitt.

Aufgabe 17. Zwei nicht zur selben Schar gehörige Kreisschnitte gehören zu einer Kugel.

Die Bestimmung der Kreisschnitte durch die Kugel § 18 Aufgabe 8 zeigt sofort, dafs der Nebenschnitt ein Kreis der anderen Schar ist.

Aufgabe 18. Die Kugel von Monge direkt aus der Gleichung $\delta^2 = n$ der Tangentialebene herzuleiten.

Aus der Formel folgt sofort, dafs die Summe der Quadrate der Lote vom Centrum auf drei zueinander senkrechte Tangentialebenen konstant und gleich $A + B + C$ ist; das ist aber das Quadrat der Hauptdiagonale des aus den drei Loten vervollständigten Parallelepipedon.

Aufgabe 19. Die Länge eines Vektor der Fläche mit den Richtungsfaktoren $\alpha \beta \gamma$ zu bestimmen.

Da für seinen Endpunkt $x = r \cos \alpha$ etc., so haben wir $\frac{1}{r^2} = \lambda_1 \cos^2 \alpha + \dots$ Dies ist die Gleichung der Ellipsoids in Polarkoordinaten; aus ihr folgt die grofse Analogie zwischen der konfokalen und der homothetischen Schar direkt, da für konfokale Flächen die Polargleichungen sich nur wie die konstante p des vorigen Paragraphen unterscheiden, also

Die Differenz der Quadrate der reciproken entsprechenden Vektoren zweier konfokalen centralen Flächen F^2 ist konstant.

Es liegt nahe, nach Analogie der Planimetrie, das Ellipsoid affin auf die Kugel abzubilden.

Sei P $\{$x ein Punkt der Fläche, setzt man $x = A^{\frac{1}{2}} \cos \alpha$, $y = B^{\frac{1}{2}} \cos \beta$, $z = C^{\frac{1}{2}} \cos \gamma$, so sind $\cos \alpha$ etc. (kürzer α etc.) die Richtungskosinus eines Strahls r. Schlägt man um M eine Kugel mit der Längeneinheit, so schneidet r die Kugel im P entsprechenden Punkte Q. Die Kugel und das Ellipsoid sind damit gegenseitig eindeutig aufeinander abgebildet und dem Vektor MP entspricht der Kugelradius MQ. Ist $A'^{\frac{1}{2}}$ die Länge von PM und sind seine Richtungskosinus b_{13} etc., so ist $x = A'^{\frac{1}{2}} b_{13} = A^{\frac{1}{2}} \cos \alpha$; $A'^{\frac{1}{2}} b_{23} = B^{\frac{1}{2}} \beta$; $A'^{\frac{1}{2}} b_{33} = C^{\frac{1}{2}} \cos \gamma$.

Aufgabe 20. Zwei konjugierten Durchmessern des Ellipsoids entsprechen wieder zwei konjugierte Durchmesser auf der Kugel.

1) Affin entsprechen parallelen Geraden wieder parallele Gerade und dem Mittelpunkte einer Strecke entspricht der Mittelpunkt der affinen Strecke.

Rechnung. Die Gleichung der dem Durchmesser P M konjugierten Ebene ist $x \xi \lambda_1 + y \eta \lambda_2 + z \zeta \lambda_3 = 0$. Ist P′ ein Punkt dieser Ebene auf der Fläche, so ist M P′ ein konjugierter Durch- bezw. Halbmesser. Ist $r' \left\{ \alpha' \beta' \gamma' \right.$ sein entsprechender auf der Kugel, so geht die Gleichung der Polarebene über in $\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0$, d. h. die zwei konjugierten Durchmessern entsprechenden Kugeldurchmesser stehen aufeinander senkrecht, also folgt

Drei konjugierten Durchmessern des Ellipsoids entsprechen drei konjugierte, d. h. zu je zwei aufeinander normale Durchmesser der Kugel.

Aufgabe 21. Mittelst dieses Satzes die (fälschlich Sätze des Apollonius) genannten Sätze des § 5 zu beweisen bezw. zu vervollständigen.

1) Die Summe der Quadrate dreier konjugierter Durchmesser ist konstant, also $4 (A + B + C)$.

2) Die Summe der Quadrate der Seitenflächen eines dem Ellipsoid in den Endpunkten dreier konjugierter Durchmesser umgeschriebenen Parallelepidons ist konstant

$$2^5 (A B + B C + A C).$$

(Die Projektionen von M P P′ und M Q Q′ auf eine der Koordinatenebenen, z. B. die z-Ebene, verhalten sich wie $(A B)^{\frac{1}{2}} : 1 . 1$ und dann der Satz § 5 S. 40).

3) Das dem Ellipsoid in den Endpunkten dreier konjugierter Durchmesser umgeschriebene Parallelepiped ist konstant $8 (A B C)^{\frac{1}{2}}$.

4) Die Summe der Quadrate der Projektionen dreier konjugierter Durchmesser auf eine beliebige Gerade oder Ebene ist konstant.

Hat die Gerade die Richtungsfaktoren u, v, w, so ist diese Summe $(u x + v y + w z)^2 + (u x' + ..)^2 + (u x'' + ..)^2 = u^2 A + v^2 B + w^2 C$, da $x y = (A B)^{\frac{1}{2}} \alpha \beta$.

Aufgabe 22. Die ersten drei Sätze aus der Lehre von den ebenen Kegelschnitten abzuleiten.

(Ein Schnitt durch zwei konjugierte Durchmesser etc.)

Aufgabe 23. Die Hauptachsengleichung eines Querschnitts aus den Sätzen des Apollonius abzuleiten.

Man betrachte den Querschnitt durch M, es sind dann die beiden Hauptachsen $L_1^{-\frac{1}{2}}$ und $L_2^{-\frac{1}{2}}$ und die Senkrechte auf der Ebene bis zur Tangentialen drei aufeinander senkrechte Halbmesser, also ihre Summe gleich $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, also a) $L_1 + L_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \Sigma \lambda_1 \cos^2 \alpha$ und b) da das Volumen des konstanten umgeschriebenen Parallelepipeds gleich $L_1^{-\frac{1}{2}} L_2^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}$, so ist $L_1 L_2 = R$, also $L^2 - L(\Sigma \lambda_1 \sin^2 \alpha) + R = 0$.

Aufgabe 24. Durch einen gegebenen Vektor L, $\alpha \beta \gamma$ einen Schnitt zu legen, in dem L eine Hauptachse ist.

Wir haben zur Bestimmung von u, v, w

$$1) \qquad L_1^2 - L_1(\Sigma \lambda - \Sigma \lambda_1 u^2) + R_x = 0,$$

$$2) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad 3) \quad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Aus 1) und 2) können wir u^2 und v^2 linear durch w^2 ausdrücken und erhalten für w^2 eine quadratische Gleichung.

Aufgabe 25. Durch Affinität zu beweisen:

Die Ecken des dem Ellipsoid in den Endpunkten dreier konjugierter Durchmesser umschriebenen Parallelepipeds liegen auf einem homothetischen Ellipsoid

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 3.$$

Aufgabe 26. Denselben Satz durch Rechnung zu erweisen.

Durch Benutzung der Relationen $u' u'' \lambda_1 + v' v'' \lambda_2 + w' w'' \lambda_3 = 0$ zwischen den Richtungskosinus dreier konjugierter Durchmesser bezw. ihrer konjugierten Ebenen.

Aufgabe 27. In der Ellipse giebt es Ein System gleicher konjugierter Durchmesser; wie steht es mit diesen Systemen beim Ellipsoid?

Zunächst folgt für die Länge der Halbmesser die bestimmte Gröſse R durch $3R^2 = A + B + C$; also liegen die Endpunkte auf der durch R bestimmten Kugel um M; also auf der Schnittkurve der Kugel und der Fläche; durch

diese geht der Kegel F^2 — Kugel $\left\{ \frac{x^2}{A}(B + C - 2A) + \ldots \right.$ $= 0$, dann bestimmt jeder Vektor auf einem Punkt P der Schnittkurve mit den beiden gleichen konjugierten Durchmessern in seiner konjugierten Ebene ein solches System, es giebt also deren unzählig viele.

Aufgabe 28. Die Gleichung der F^2 auf ein System konjugierter Achsen zu transformieren.

Resultat: $\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 1.$

Aus dieser Transformation lassen sich die meisten „Apollonischen" Sätze direkt ableiten.

Aufgabe 29. Durch die Endpunkte dreier konjugierter Halbmesser die Ebene zu legen.

Aufgabe 30. Die Länge des vom Centrum auf eine Normale in $x_1 \ldots$ gefällten Lotes

$$p^2 = \frac{x_1^2\, y_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \ldots}{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2}.$$

Aufgabe 31. Die Länge der von einem Punkte $P \{ x'$ an das Ellipsoid gezogenen Tangente.

Die Gleichung 11 § 4 giebt sofort, wenn die Potenz des Punktes π ist,

$$R^2 = \pi : \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2,$$

wo a, b, c die Richtungskosinus der Tangente.

Hieraus folgt, da der Nenner stets > 0 ist:

Nur von den Punkten, deren Potenz > 0 ist, lassen sich reelle Tangentenkegel an das Ellipsoid legen.

Diese Punkte heifsen die äufseren (vgl. Kugel).

Sind also $a = (x - x_1)$ etc. die Richtungsfaktoren einer Tangente, so gilt die Formel

$$\lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 c^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 - 1$$
$$= \lambda_1 \lambda_2 C^2 + \lambda_1 \lambda_3 B^2 + \lambda_2 \lambda_3 A^2.$$

(Gleichung der Fläche in Strahlenkoordinaten.)

Aufgabe 32. Die letzte Formel aus der Gleichung der Tangentialebene, ohne den Potenzsatz abzuleiten.

Die meisten Sätze bleiben für die Hyperboloïde mit der durch das Zeichen der λ nötigen Änderung bestehen.

§ 22. Das einschalige Hyperboloïd.

Seine Gleichung in der Hauptform ist

$$1)\qquad \frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

Schreibt man sie in der Form

$$\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B} = 1 - \frac{z^2}{C}$$

und wendet die Formel $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ an, so erhält man, wenn $\sqrt{A}$ mit a etc. bezeichnet wird,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right).$$

Setzt man

$$2)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \varrho\left(1 + \frac{z}{c}\right);\ \ \varrho\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 - \frac{z}{c}$$

und

$$3)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sigma\left(1 - \frac{z}{c}\right);\ \ \sigma\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 + \frac{z}{c},$$

wo ϱ und σ beliebige Parameter sind, so liegen sowohl alle Geraden, in welchen sich die zugeordneten Ebenen der Scharen 2), als auch alle Geraden, in welchen sich die entsprechenden Elemente der Scharen 3) schneiden, auf der Fläche.

Das einschalige Hyperboloid gehört also zu den geradlinigen Flächen zweiter Ordnung und es gelten die Sätze des § 7.

Aufgabe 1. Jede Gerade, welche auf einer Fläche liegt, gehört zu einer dieser beiden Scharen von Geraden. Die Gerade sei $x = \alpha z + \beta$; $y = \gamma z + \delta$, damit sie auf der Fläche liege, mufs nach Substitution in 1) die Koeffizienten von z^2, z, und das konstante Glied verschwinden. Dies giebt

$$\beta^2 = \frac{\lambda_3 + \lambda_1 \alpha^2}{\lambda_1 \lambda_3} = a^2 + c^2 \alpha^2;\quad \gamma^2 = \frac{-\lambda_3 - \lambda_1 \alpha^2}{\lambda_2};$$

$$\delta^2 = -\frac{\lambda_1 \alpha^2}{\lambda_2 \lambda_3}$$

und die Beschränkung $\alpha \beta \lambda_1 + \lambda_2 \gamma \delta = 0$, wo das Zeichen

einer der drei Gröfsen $\beta\gamma\delta$ durch das der beiden andern bestimmt ist. Setzt man $\alpha = \frac{a}{2c}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)$, so ist

$$\beta = \pm\frac{a}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right);\ \gamma = \pm\frac{b}{2c}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right);$$

$$\delta = \pm\frac{b}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Alle Minuszeichen geben nur für ϱ den Wert ϱ'.

Aufgabe 2. Die Aufgabe 1 in Strahlenkoordinaten zu lösen.

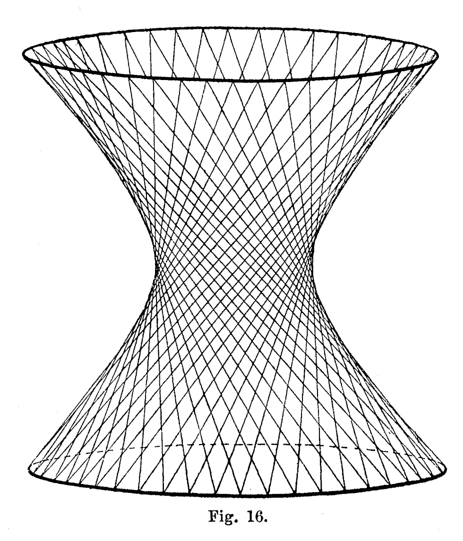


Fig. 16.

Die Ebenen beider Doppelscharen sind unter sich projektiv bezogen, wenn wir die Ebenen gleicher ϱ bezw. gleicher σ einander zuordnen; es kreuzen sich also (§ 7) die Schnittgeraden der Doppelschar 2) und ebenso die der Schar 3), dagegen schneidet jede Gerade der einen Schar jede der andern, d. h. (Fig. 16):

Durch jeden Punkt P des einschaligen Hyperboloids gehen zwei reelle Geraden, je eine der beiden Scharen.

Aufgabe 3. Diesen Satz direkt aus der Gleichung der Geraden in Strahlenkoordinaten zu erweisen.

Die Ebene durch die beiden Geraden der F^2 in P ist dann die Tangentialebene in P, da jede Gerade ihre eigene Tangente ist.

Aufgabe 4. Diesen Satz durch Rechnung nachzuweisen.

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1 - \frac{zz'}{c^2},$$

in der sowohl die Gerade der Schar 2)

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) = \left(1 - \frac{z'}{c}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right) \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right) = \left(1 + \frac{z'}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right); \\ \left[\varrho = \left(1 - \frac{z'}{c}\right) : \left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) = \left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right) : \left(1 + \frac{z'}{c}\right)\right] \end{cases}$$

als auch die Gerade der Schar 3), für welche

$$\sigma = \left(1 + \frac{z'}{c}\right) : \left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right) = \left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{a}\right) : \left(1 - \frac{z'}{c}\right)$$

liegt. Es ist

$$\sigma + \varrho : \sigma - \varrho = c : z', \quad \sigma : \varrho = (c + z') : (c - z'),$$

d. h. das Verhältnis der projektiven Doppelverhältnisse ist längs eines Parallelschnitts zur z-Ebene konstant.

Aufgabe 5. Die Schnittgerade der Tangentialebene mit einer Symmetrieebene ist in Bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt Polare, deren Pol die Projektion des Berührungspunktes auf die Symmetrieebene ist.

Z. B. für die y-Ebene ist die Schnittgerade $\frac{xx'}{a^2} + \frac{zz'}{b^2} = 1$, und dies ist die Polare des Punktes $x', 0, z'$, d. h. aber der Projektion π des Punktes P auf die y-Ebene.

Der Satz gilt allgemein und liefert in

Aufgabe 6. Die Konstruktion der Tangentialebene in P.

Man projiziere (Fig. 17) P auf die y-Ebene in π. Da vermöge der Gleichung der Fläche $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} > 1$ ist, so fällt π aufserhalb der Schnittellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, der so-

genannten Kehlellipse, und die Polare von π für diese Ellipse ist zugleich Chordale (Berührungssehne); daher zieht man von π an die Kehlellipse die Tangenten $\pi\gamma$ und $\pi\delta$ und verbindet die Berührungspunkte γ und δ mit dem Punkte P, so sind $P\gamma$ und $P\delta$ die beiden Haupttangenten (§ 7) in P und $\gamma P \delta$ ist die Tangentialebene.

Beim Ellipsoid fällt π in die Ellipse und die Polare schneidet nicht, aber die Ebene durch sie und P ist auch hier die Tangentialebene.

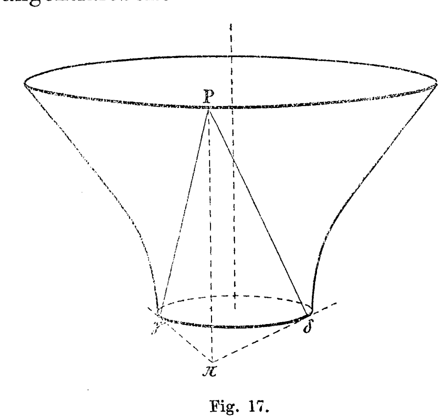


Fig. 17.

Alle Schnitte parallel der y-Ebene sind Ellipsen; hat die schneidende Ebene die Gleichung $y \pm \delta = 0$, so ist die Gleichung des Schnitts

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\delta^2}{b^2} = \varepsilon^2$$

und da $\varepsilon \geqq 1$, so hat von der ganzen Schar ähnlicher Ellipsen die Kehlellipse die kleinste Fläche und Hauptachsen, und nach beiden Seiten der y-Ebene nehmen die Schnittellipsen symmetrisch zu. (Fig. 18.)

Die Endpunkte der Hauptachsen der Kehlellipse heißen die Scheitel des Hyperboloids.

Aufgabe 7. Die Schnitte parallel der x-Ebene zu untersuchen.

Der Hauptschnitt selbst ist $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, eine Hyperbel

mit den Achsen c und b, ihre **Hauptscheitel** (Endpunkte der reellen Achse) liegen auf Scheiteln der Kehlellipse.

Die Schnitte im Abstand $\pm\delta$ sind ähnliche Hyperbeln mit den Gleichungen

$$\frac{z^2}{c^2\varepsilon^2} - \frac{y^2}{b^2\varepsilon^2} = 1, \text{ wo } \varepsilon^2 = 1 - \frac{\delta^2}{a^2}.$$

Da für die Hauptscheitel, so lange ε reell, $\varepsilon^2 > 0$, $z = c\varepsilon$, $y = 0$, $x = \delta$, so genügen sie der Gleichung der

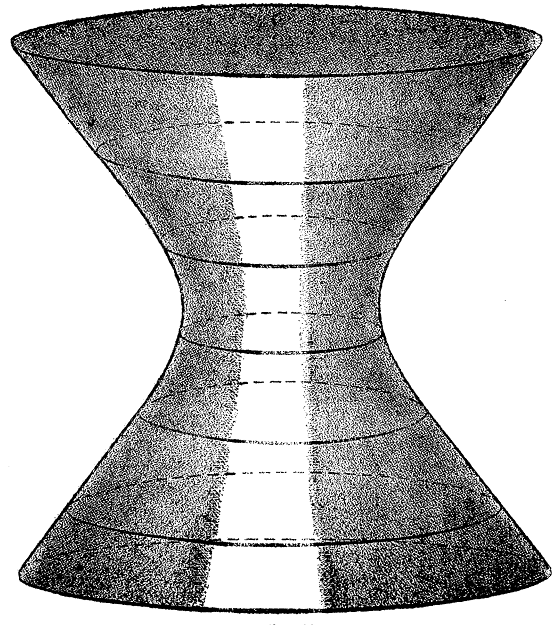


Fig. 18.

Kehlellipse. Es liegen also die Hauptscheitel der Hyperbeln bis $\varepsilon = 0$ auf der Kehlellipse und die Schnitte sind im eigentlichen Sinne dem Hauptschnitt $x = 0$ ähnlich. Wenn $\delta = a = x$, so wird die Schnittebene zur Tangentialen in den Scheiteln der Kehlellipse auf der x-Achse, die Hyperbel geht in die Asymptoten, das System der beiden Haupttangenten, über.

Wird x bezw. $\delta > a$, so werden die **Schnitte der zum Hauptschnitt x adjungierten Hyperbel ähnlich**

(im engeren Sinne, denn die adjungierte ist der eigentlichen Hyperbel ähnlich mit imaginärem Ähnlichkeitsfaktor). Ihre Hauptscheitel liegen von da ab auf dem Hauptschnitt $z = 0$.

Aufgabe 8. Die Schnitte parallel der z-Ebene zu untersuchen.

Die Resultate sind den vorigen ganz analog.

Aufgabe 9. Sind $a' b' c'$ irgend drei konjugierte Halbmesser des Hyperboloids und $P \{ x'$ irgend ein Punkt, der auf das System als Achse bezogen ist, so ist

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

wo $a\, b\, c$ die Hauptachsen.

Aufgabe 10. Konstruiert man über drei konjugierten Durchmessern des Hyperboloids ein Parallelepipedon, so liegt die Gegenecke des Centrums wieder auf der Fläche.

Aufgabe 10a. Den Ort der andern Ecken zu bestimmen.

Aufgabe 11. Die Gleichung des Hyperboloids in Ebenenkoordinaten

$$d^2 = a^2 u - b^2 v - c^2 w.$$

Aufgabe 12. An das Hyperboloid zu einer gegebenen Ebene parallele Tangentialebenen zu legen.

Im allgemeinen giebt es zwei, reell wenn $d^2 > 0$, d. h., wenn die Ebene $ux + vy + wz + d = 0$ ist, wenn die Ebene den Asymptotenkegel in einer Hyperbel schneidet; eine, wenn sie ihn in einer Parabel schneidet, und keine wenn in einer Ellipse.

Es folgt dies ohne alle Rechnung sofort aus der Thatsache, daſs die Tangentialebene das System zweier Geraden d. h. eine Hyperbel ausschneidet und die Schnitte der Fläche und des Asymptotenkegels homothetische Kegelschnitte sind.

Aufgabe 13. Den Asymptotenkegel zu untersuchen.

Die Gleichung ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 = K(s)$, d. h. er ist ein elliptischer Kegel. Sein Schnitt durch eine Ebene, welche der y-Ebene im Abstand $\pm \delta$ parallel ist, ist die Ellipse mit den Achsen $a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, $b\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, d. h. aber,

ihre Achsen sind kleiner als die der homothetischen Ellipse, in denen sie die Fläche F^2 schneidet; d. h. der Asymptotenkegel K (Fig. 19) liegt ganz innerhalb der Fläche. Auf der Fläche ist $K(s) = 1$, zwischen F^2 und $K > 0$, innerhalb $K < 0$, aufserhalb der Fläche F^2 ist $K(s) > 1$, denn wenn Q ein Punkt aufserhalb, so schneidet MQ die Fläche in P zwischen M und Q, es ist daher

$$x_q = \mu x_p; \; y_q = \mu y_p; \; z_q = \mu z_p$$

wo $\mu > 1$ und $K(Q) = \mu^2 K(P) = \mu^2$.

Diese Beziehungen sind umkehrbar.

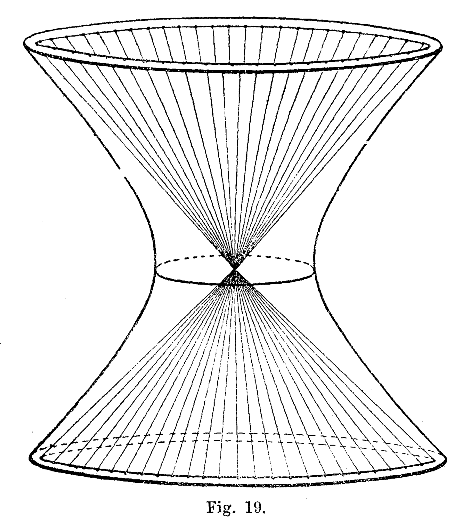


Fig. 19.

Aufgabe 14. Wenn der Asymptotenkegel gleichseitig, sind die Schnitte, welche aus der F^2 gleichseitige Hyperbeln ausschneiden, den Tangentialebenen des zum Asymptotenkegel supplementären (s. § 19) parallel.

Aufgabe 15. Die Kreispunkte der F^2.

Damit unsre Formeln § 18 S. 106 passen, mufs $\lambda_3 < \lambda_1$, d. h. $c > a$ angenommen werden. Für den Radius des Schnittkreises haben wir dann $r^2 = c^2 \left(1 + \frac{d^2 c^2}{b^2 a^2}\right)$, woraus ersichtlich, 1) dafs der kleinste Kreis sein Centrum im Mittelpunkt der Fläche hat, 2) dafs r nie 0 wird,

also keine reellen Kreispunkte auf dem einschaligen Hyperboloid existieren.

Aufgabe 16. Die Punkte der Fläche zu bestimmen, in denen die beiden Erzeugenden aufeinander senkrecht stehen. (Orthogonal-Punkte) vgl. § 7. Die Kugel von Monge. Andere Lösung: Die Tangentialebene in diesem Punkte schneidet aus der F^2 eine gleichseitige Hyperbel, die in ihr Asymptotenpaar übergeht. Sie ist also einer der Tangentialebenen des Kegels $\frac{x^2}{\lambda_2 + \lambda_3} + \ldots = 0$ parallel. Nennen wir den Punkt der F^2, etwa x' und den zugehörigen des Kegels ξ', so haben wir nach der Gleichung der Tangentialebene

$$\lambda_1 x' = \xi' (\lambda_2 + \lambda_3)^{-1},$$

also ist der Ort der Punkte x' der Kegel

$$\lambda_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) x^2 + \lambda_2^2 (\lambda_1 + \lambda_3) y^2 + \lambda_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2) z^2 = 0 = \text{Ke}.$$

Dieser Kegel ist für das Ellipsoid imaginär. Multipliziert man die Gleichung der Fläche mit $(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)$ und subtrahiert F^2 und Ke, so erhält man die Gleichung der Kugel von Monge

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1}) = 0$$

oder für unsre F^2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (A - B + C) = 0.$$

Die orthogonalen Punkte der F^2 liegen auf dem Schnitt der Kugel K mit dem Kegel und dieser ist eine sphärische Hyperbel.

Aufgabe 17. Ort der Centren aller gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der F^2.

Der Kegel Ke.

Aufgabe 18. Wann existieren keine reellen Orthogonalpunkte auf dem einschaligen Hyperboloid?

Wenn Ke imaginär ist; dies tritt ein, wenn B gröſser als A und gröſser als C ist, dann sind die Asymptotenwinkel beider hyperbolischen Hauptschnitte kleiner als 90^0.

Aufgabe 19. Wann ist die Kugel von Monge imaginär?

Wenn $B > A + C$ ist.

Hervorzuheben ist, dafs in diesen beiden Fällen der Kegel Ke und die Kugel von Monge für das zweischalige Hyperboloid desselben Asymptotenkegels reell sind.

§ 23. Das zweischalige Hyperboloid.

Das zweischalige Hyperboloid sei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Es ist vom einschaligen nur durch das Zeichen des konstanten Gliedes unterschieden und man kann alle Rechnungen für beide gemeinsam machen, wenn man das konstante Glied $\sqrt{1}$ nennt. Dennoch ist die gestaltliche Verschiedenheit sehr

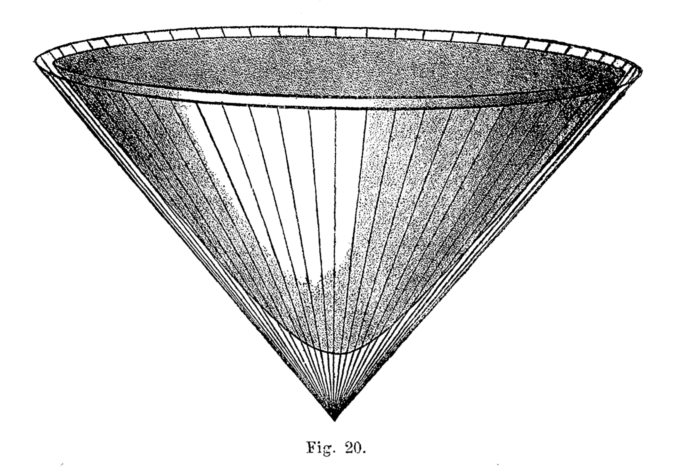


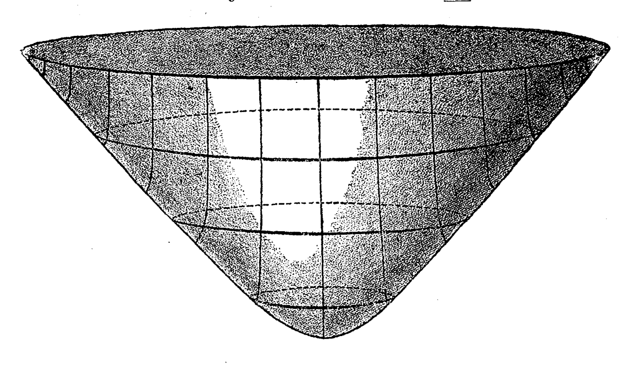
Fig. 20.

grofs. Wenn a, b, c dieselben Werte haben wie im vorigen Paragraphen, bleibt der Asymptotenkegel derselbe, nur liegt er ganz aufserhalb der Fläche (s. Fig. 20), denn sein Schnitt parallel der y-Ebene im Abstande $\pm\delta$ ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\delta^2}{b^2}$, während der entsprechende der F^2 die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\delta^2}{b^2} - 1$ ist. Das einschalige

und zweischalige Hyperboloid mit gleichem Asymptotenkegel nennt man adjungiert (adjungierte Hyperbeln).

Aufgabe 1. Die Hauptschnitte parallel der y-Ebene.

Der Hauptschnitt $y = 0$ giebt die imaginäre Ellipse mit den Achsen ia und ib, die Parallelschnitte bleiben imaginär bis ihr Abstand von $y = 0$ den Wert $\pm b$ erreicht. Für



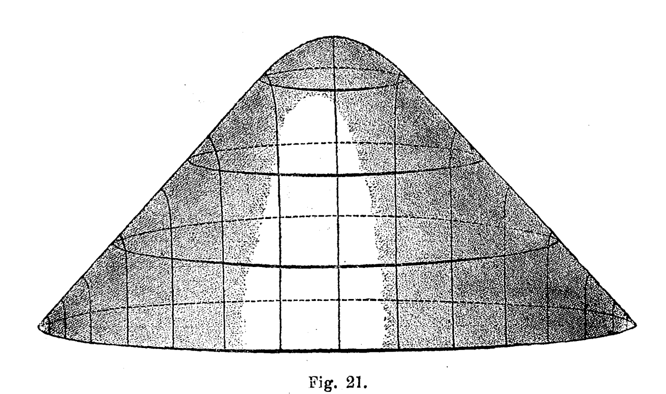


Fig. 21.

diese beiden Schnittebenen, welche Tangentialebenen sind, wird der Schnitt die Ellipse mit den Achsen $a\,0$ und $c\,0$, d. h. er reduziert sich auf die Punkte $x = 0$, $z = 0$, $y = \pm b$.

Diese beiden ausgezeichneten Punkte heifsen die Scheitel der Fläche.

Die Fläche besteht aus zwei von einander durch einen Streifen von der Breite 2b und parallel $y = 0$ getrennten Stücken oder Schalen (Fig. 21).

Die Schnittellipsen werden, wenn der absolute Betrag ihres Abstandes beständig wächst, beständige gröfsere homothetische Ellipsen.

Aufgabe 2. Die Schnitte parallel den Ebenen $x = 0$, $z = 0$.

Der Hauptschnitt $x = 0$ ist die Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c_2} = 1$$

und die Parallelschnitte sind ähnliche Hyperbeln mit beständig wachsenden Achsen. Der Hauptschnitt $z = 0$ ist die Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Die Hauptscheitel der ersten Schar liegen auf dem Hauptschnitt der zweiten Schar u. v. v.

Die Nebenscheitel beider Scharen liegen auf dem imaginären Hauptschnitt $y = 0$.

Da R des § 17 jedes Zeichen annehmen kann, so existieren Schnitte aller Arten, wie beim einschaligen Hyperboloid und die Bedingungen, da sie nur vom Asymptotenkegel abhängen, sind dieselben. Damit unsre Formel § 18 die reellen Kreisschnitte darstelle, mufs also auch hier $c^2 > a^2$ sein, alsdann ist

$$\cos^2 \alpha = \frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Kreisschnitte sind also der absolut gröfseren der beiden negativen λ bezw. imaginären Achsen parallel.

Die Koordinaten der vier reellen Kreispunkte sind

$$x_1 = a\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{b^2 + a^2}}; \quad y_1 = b\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^2 + a^2}}; \quad z_1 = 0;$$

$$x_2 = -x_1; \; y_2 = -y_1; \; z_2 = 0; \; x_3 = x_1; \; y_3 = -y_1; \; z_3 = 0;$$
$$x_4 = -x_1; \; y_4 = y_1; \; z_4 = 0.$$

Aufgabe 4. Die Gleichung der Tangentialebene im

Punkte $x' y' z'$ aufzustellen und die imaginären Schnittgeraden mit F^2

$$-\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} - \frac{z z'}{c^2} = 1.$$

Aufgabe 5. Der Schnitt der Tangentialebene in P mit der y-Ebene ist die Polare des in Bezug auf die Projektion von P diametralen Punktes für die Ellipse a, c.

Der zu P diametrale Punkt P' ist $\{ -x', -y', -z'$, seine Projektion auf die y-Ebene ist $\{ -x', -y'$ etc.

Aufgabe 6. Die Tangentialebene in P zu konstruieren.

Aufgabe 7. Tangentialebene von gegebener Stellung.

Die Gleichung der F^2 in Ebenenkoordinaten ist

$$(u x + v y + w z)^2 = -a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2.$$

Dieselbe Betrachtung wie im vorigen Paragraphen ergiebt, dafs es zwei giebt, wenn die Schnittebene den Asymptotenkegel in einer Ellipse (Kegelschnitt mit imaginären Asymptoten) schneidet, eine, wenn der Schnitt parabolisch, d. h. also wenn er einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallel, und keine, wenn der Schnitt des Kegels hyperbolisch.

Aufgabe 8. Ein für alle F^2 ausnahmslos geltender Satz: Die sämtlichen Sehnen einer Fläche zweiten Grades, welche in einem festen Punkt P ihre Mitte haben, liegen in einer der Polarebene dieses Punktes parallelen Ebene.

Wir hatten § 5 Formel 14 $P(s\,m) = P(s' s'')(1 + \lambda)$ und als Spezialfall $P(m\,m) = G(m) = 2\,P(s' s'')$, wo $m \{ x' + x'', \ldots, 2$ und $s \{ s' + \lambda s'', \ldots, 1 + \lambda$, also wenn $m \{ \xi \eta \zeta 1$

$$P(x y z 1;\ \xi \eta \zeta 1) = G(m)$$

d. h. die Ebene ist die Tangentialebene der homothetischen Fläche, welche durch P geht.

Aufgabe 9. Der Schnitt zweier konzentrischen centralen F^2 liegt stets auf einem Kegel.

$$(\lambda_1 - \lambda_1') x^2 + \ldots = 0.$$

Aufgabe 10. Die reellen und imaginären Kreispunkte einer F^2 liegen zu je drei auf acht imaginären Geraden.

VI. Abschnitt.

Die Paraboloide.

§ 24. Die Gleichungen der Flächen in der Hauptform.

Wenn die Determinante A von $G(s) \neq 0$, dagegen die des Asymptotenkegels $\alpha_{44} = 0$, war, so rückte die Spitze des Kegels, das Centrum der Fläche, ins Unendliche, der Kegel wurde zum Cylinder.

Die Form $G(s)$ der Fläche ist dann die Summe der Cylinderform $C y \{ a_{11} x^2 + \ldots a_{44}$ wo $\alpha_{44} = 0$ und der linearen oder Ebenen-Form

$$E(s) \{ 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z.$$

Der Cylinder kann elliptisch oder hyperbolisch sein; denn wäre er parabolisch, so wäre $A = 0$ gegen die Voraussetzung und $G(s)$ ein parabolischer Cylinder.

Transformiert man den Cylinder auf seine Hauptachsen nach § 34, und so, dafs wir wieder die Cylinderachse, d. h. die Gerade nach dem unendlich fernen Doppelpunkt zur z-Achse wählen, so wird

$$G(s) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + E'(s).$$

Verschiebt man den Ursprung nach dem Punkt

$$S \left\{ \frac{-a'_{14}}{\lambda_1}; \quad \frac{-a'_{24}}{\lambda_2}; \quad \frac{-a'_{44}}{a'_{23}} \right.$$

so erhält man für $G(s)$ die Gleichung

$$1) \qquad G(s) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2 p z = 0,$$

die Normalform der Paraboloide.

In dieser Gleichung sind zwei der Gestalt nach sehr verschiedene Flächen enthalten, je nachdem λ_1 und λ_2 gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Als Zeichen der λ kann man im ersten Fall das $+$ Zeichen wählen, p kann negativ gesetzt werden, denn wenn es sich als positiv ergiebt, braucht man nur die Richtungen auf der z-Achse zu vertauschen. Im zweiten Fall können wir annehmen, dafs λ_2 negativ sei; wir haben also entweder das elliptische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + 2pz = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B} + 2pz = 0$$

das hyperbolische Paraboloid.

Die Gröfse p ist hier von der -1. Dimension.

Die z-Achse heifst die Achse der Paraboloide.

Die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ sind Symmetrieebenen der Fläche.

Aufgabe 1. Die Tangentialebene im Punkt $P \{ x'$ zu bestimmen.

Die homogene Form von 1) ist

$$= \lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2 + 2 p s_3 s_4 = 0$$

somit die Gleichung der Tangentialebene

$$4) \qquad \tau = \lambda_1 x x' + \lambda_2 y y' + p(z + z') = 0,$$

und dies ist für jeden beliebigen Punkt P die Gleichung seiner Polarebene.

Aufgabe 2. Die Tangential- bezw. Polarebene von P schneidet die xz-Ebene in der Polaren der Parabel $\lambda_1 x^2 + 2pz = 0$ und des Punktes x', z', d. h. der Projektion von P, woraus sich die Konstruktion sofort ergiebt.

Aufgabe 2a. Die Gleichung der Paraboloide in Ebenenkoordinaten.

Ist die Ebene in allgemeiner Form gegeben, u, v, w, d, so mufs $\lambda_1 x' n = u$, $\lambda_2 y' n = v$, $np = w$, $nz'p = d$ sein; hieraus oder auch direkt aus $\alpha_{11} = -\lambda_2 p^2$, $\alpha_{22} = -\lambda_1 p^2$, $\alpha_{34} = -\lambda_1 \lambda_2 p$, alle andern $\alpha = 0$ ergiebt sich

$$5) \qquad p u^2 A + p v^2 B + 2 w d = 0.$$

Der Berührungspunkt dieser Ebenen wird bestimmt durch

$$6)\qquad x' = \frac{u A p}{w};\ \ y' = \frac{v B p}{w};\ \ z' = \frac{d}{w}.$$

Aufgabe 3. Ist $w = 0$, d. h. ist eine Ebene der Cylinderachse parallel, so rückt der Pol ins Unendliche.

Aufgabe 4. Das Verhalten der Flächen im Unendlichen.

Der Schnitt von $G(s)$ mit der Ebene $s_4 = 0$, der unendlich fernen, ist das Gebilde $\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2 = 0$. Dieser Asymptotencylinder liefert also zwei Gerade, deren Projektionen auf die z-Ebene die Gleichung

$$(x\sqrt{\lambda_1} + i\sqrt{\lambda_2}\, y)(x\sqrt{\lambda_1} - i\sqrt{\lambda_2}\, y) = 0$$

liefert, und deren Schnittpunkt $x = 0$, $y = 0$, $z = \infty$ der Doppelpunkt der Schnittkurve ist. Die Tangentialebene in diesem Punkt enthält, wie man aus der homogenen Form von τ sieht, diese beiden Geraden, die Fläche wird also von der unendlich fernen Ebene in diesem Punkte berührt. Die Geraden selbst sind nur wenn $\lambda_2 < 0$ d. h. beim hyperbolischen Paraboloid reell.

Man sieht auch direkt ein, daſs für hinlänglich groſse Werte der Koordinaten, aber für Punkte, welche in bestimmter Richtung liegen, d. h. so daſs die Verhältnisse $x : y : z$ bestimmt sind, z^1 gegen x^2 und y^2 verschwindet, so daſs $G(s)$ im Unendlichen mit seinem Asymptotencylinder $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$ zusammenfällt. Bei der Wahl dieses Cylinders ist die Konstante c willkürlich, denn der Cylinder $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$ fällt selbst im Unendlichen mit dem Cylinder $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ zusammen; es ist vielfach zweckmäſsig, als Konstante von $G(s)$ nicht 0 zu wählen.

Der Asymptotencylinder $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ zerfällt aber wieder in die beiden Ebenen $(\lambda_1^{\frac{1}{2}} x \pm \lambda_2^{\frac{1}{2}} y) = 0$, welche sich in der z-Achse schneiden, und schneidet daher die unendlich ferne Ebene in zwei Geraden, deren Schnittpunkt auf der z-Achse liegt.

Aufgabe 5. Die Kugel von Monge für die Paraboloide.

Nehmen wir u, v, w, $d = -\delta$ als die Hesse'schen

Koordinaten der drei zu je zwei normalen Berührungsebenen und addieren die drei Gleichungen 5), so erhalten wir

$$p(A + B) - 2(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \delta_3 w_3) = 0.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, indem wir die drei Gleichungen dreier solcher Ebenen mit w_1, w_2, w_3 multiplizieren und uns erinnern, dafs $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ etc., $u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$ etc. Dafs die Summe $\delta_1 w_1 + \ldots = 0$ nichts anderes ist als das z des gemeinsamen Punktes, also:

Für die Paraboloide artet die Kugel von Monge in die der z-Ebene im Abstande $\frac{1}{2}(pA + pB)$ parallele Ebene aus.

Aufgabe 6. Die Gleichung der Paraboloide in Strahlenkoordinaten.

Aus der Gleichung des Berührungskegels

$$P^2(s\,s') = G(s)\,G(s') = 0$$

entnehmen wir sofort

$$7)\quad p^2 c^2 - \lambda_1 \lambda_2 C^2 + 2\lambda_1 p\,a\,B - 2\lambda_2 p\,b\,A = 0,$$

ein Strahlenkomplex zweiten Grades.

Aufgabe 7. Wann ist der Tangentialkegel reell?

Man hat für die Berührungspunkte

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2pz = 0$$
$$\lambda_1 x x' + \lambda_2 y y' + p(z + z') = 0$$

also durch Subtraktion

$$\lambda_1 x a + \lambda_2 y b + p c = 0$$

wo a, b, c die Richtungsfaktoren einer Tangente. Ist die Potenz des Punktes x' (d. h. der Spitze) gleich π, so haben wir $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2pz' = \pi$ und erhalten durch Subtraktion $\lambda_1 x' a + \lambda_2 y' b + p c = -\pi$ und wieder durch Subtraktion

$$7a)\qquad \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 = \pi.$$

Wenn λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist diese Gleichung stets erfüllbar, wenn aber λ_1 und λ_2 positiv sind, so ist sie für negatives π nur durch imaginäre Werte von a oder b oder beiden erfüllbar, d. h. also

An ein hyperbolisches Paraboloid läfst sich von jedem Punkt ein Tangentenkegel legen, an das

elliptische nur für die Punkte, für welche die Potenz positiv ist, diese nennen wir wie bei der Kugel äufsere Punkte.

Aufgabe 8. Welche Fläche stellt die Gleichung 7) dar?

Einen Cylinder, der durch die Berührungskurve geht, die Hauptachsen des Paraboloids hat, dem Cylinder $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$ ähnlich ist und liegt, nur dafs die Hauptcylinderachse durch die Spitze des Kegels geht.

Aufgabe 9. Einem Paraboloid einen Cylinder umzuschreiben.

Aus Aufgabe 6 entnehmen wir unmittelbar die Gleichung des Cylinders, denn a, b, c sind die konstanten Koordinaten der unendlich fernen Spitze des Cylinders bezw. die Richtungsfaktoren der Cylinderkante.

Die Berührungskurve hat die Gleichung $\lambda_1 x a + \lambda_2 y b + p c = 0$, d. h. sie ist der z-Ebene parallel.

Aufgabe 10. Durch Rechnung nachzuweisen, dafs man in der Tangentialebene jedes Punktes dieser Ebene eine Gerade von der Richtung a, b, c ziehen kann.

Ist x_1 ein Flächenpunkt dieser Ebene, so ist die Gleichung seiner Tangentialebene für $x = x_1 + r a$ etc. identisch erfüllt.

Aufgabe 11. Aus der Gleichung 4) Aufgabe 1 den Satz zu entnehmen:

Liegen die Pole auf einer Parallelen zur Flächen-Achse, so sind die Polaren parallel.

Diese Parallele heifst daher hier Durchmesser.

Aufgabe 12. Die Umkehrung des Satzes durch Rechnung zu erweisen.

Die Gleichungen 6) zeigen, dafs sich durch Änderung von d nur die z-Koordinate des Poles ändert; es gehört also zur Stellung u, v, w der Durchmesser $x = \frac{u p}{w \lambda_1}$; $y = \frac{v p}{w \lambda_2}$.

Aufgabe 13. Die Formel 7 a) Aufgabe 7 aus dem Potenzsatz Aufgabe 11 § 4 abzuleiten.

Aufgabe 14. Die Polarebene eines in der Richtung a b c unendlich fernen Punktes ist parallel der Flächenachse.

---

§ 25. Ebene Schnitte der Paraboloide.

Wenn wir das Paraboloid G(s) durch eine Ebene E(s) $\{ b_{13} s_1 + b_{23} s_2 + b_{33} s_3 + d s_4 = 0$ schneiden, so legen wir wieder durch die Schnittkurve den Cylinder, dessen Achse auf E(s) senkrecht steht. Wir haben wieder

$$C_y = G(s) + E(s) H(s) = 0$$

und erhalten für die Koeffizienten der Cylinderform

$$a_{11} = \lambda_1 + 2 u b_{13}; \ a_{12} = b_{23} u + b_{13} v; \ a_{33} = 2 w b_{33};$$

d. h. also genau dieselben Werte wie früher, nur dafs $\lambda_3 = 0$ ist. Mit dieser Änderung bleiben also die Rechnungen bestehen.

Aufgabe 1. Die Ebenen, welche aus einem Paraboloid gleichseitige Hyperbeln ausschneiden, sind den Tangentialebenen des Kegels

$$\frac{x^2}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_2} + \frac{z^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0$$

parallel.

Aufgabe 2. Die Ebenen, welche aus einem Paraboloid Parabeln ausschneiden, sind der Achse der Fläche parallel.

Aufgabe 3. Ist die Schnittebene einer der Achsen parallel, so ist die Nebenebene derselben Achse parallel.

Aufgabe 4. Die Nebenebenen paralleler Ebenen sind parallel.

Aufgabe 5. Die Stellung der Kreisschnitte anzugeben.

Wir haben

$$1)\ \cos^2\alpha = b_{13}^2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}; \ \cos^2\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}; \ \cos^2\gamma = 0;$$

$$2)\ \cos^2\alpha = 0; \ \cos^2\beta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}; \ \cos^2\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

$$3)\ \cos^2\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}; \ \cos^2\beta = 0; \ \cos^2\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Wenn λ_2 negativ ist, d. h. für das hyperbolische

Paraboloid sind alle Kreisschnittformen imaginär bis auf die erste, während für das elliptische nur diejenige Doppelschaar reell ist, bei denen das gröfsere λ im Nenner von $\cos\gamma$ steht. Man kann annehmen, dafs $\lambda_1 < \lambda_2$.

Aufgabe 6. Die Schar 1) zu untersuchen.

Die Schar 1) gehört, da ihre Ebenen der z-Achse parallel, zugleich zu den parabolischen Schnitten; der Widerspruch ist nur scheinbar, denn diese Ebenen schneiden Gerade aus, und diese Geraden können sowohl als Kreise mit dem Radius ∞, wie als Parabeln mit dem Parameter 0 betrachtet werden.

Die Gleichung dieser Geraden wird gefunden als Schnitt der Ebene $x b_{13} + y b_{23} + d = 0$ mit der Ebene

$$x\sqrt{\lambda_1} - y\sqrt{-\lambda_2} = \frac{2pz}{d\sqrt{-\lambda_2 + \lambda_1}},$$

also giebt es eigentliche Kreisschnitte beim hyperbolischen Paraboloid überhaupt nicht.

Aufgabe 7. Die Sätze in Aufgabe 1, 2, 5, 6, 7 durch Transformation der Koordinaten in die Schnittebene abzuleiten.

Aufgabe 8. Den Abstand der Nebenebene, den Radius des Schnitts, die Koordinaten des Centrums zu bestimmen.

Wir haben $\cos\alpha = 0$, setzen wir $\cos\beta = \beta$ und $\cos\gamma = \gamma$, so mufs aus der Gleichung des Cylinders, wenn man das Kreuz der y-, z-Achsen um die x-Achse dreht, so dafs die neue y-Achse, die η-Achse, in die Cylinderachse fällt, η herausfallen. Wir haben $y = \eta\beta - \zeta\gamma$; $z = \eta\gamma + \zeta\beta$ und erhalten

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_1 \zeta^2 + \eta(\delta + 2d(v\beta + w\gamma) + 2p\gamma)$$
$$+ \zeta(2d(w\beta - v\gamma) + 2p\beta,$$

oder:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_1 \zeta^2 + \eta(\delta + d(\lambda_1 - \lambda_2) + 2p\gamma)$$
$$+ 2\zeta(\lambda_2 d\beta\gamma + p\beta) + d\delta = 0.$$

Hieraus bestimmt sich:

$$\delta = -d(\lambda_1 - \lambda_2) - 2p\gamma$$

$$\eta_c = -d,\ \zeta_c = -\left(\frac{\lambda_2\beta\gamma d + p\beta}{\lambda_1}\right)$$

und hieraus für die Koordinaten des Centrums in den Koordinaten x, y, z

$$x_c = 0;\ \ y_c = \frac{p\beta}{\lambda_2\gamma};\ \ z_c = -\frac{d}{\gamma} - \frac{\beta^2 p}{\gamma\lambda_2} = \frac{-d - p(\lambda_2 - \lambda_1)}{\gamma},$$

$$r^2 = \frac{-d\delta - \zeta c^2}{\lambda_1}.$$

Aufgabe 9. Die Resultate in den Gleichungen durch Aufgabe 7 zu kontrollieren.

Aufgabe 10. Die Koordinaten des Centrums durch den Durchmesser, auf dem sie liegen, abzuleiten.

Der zugehörige Durchmesser ist $y = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{p}{\lambda_2},\ x = 0,$ liegt also in der x-Ebene.

Aufgabe 11. Die Kreispunkte des elliptischen Paraboloids zu bestimmen.

Für das hyperbolische sind die Kreisschnitte, also auch die Kreispunkte imaginär, für das andre wird $r = 0$, wenn das Centrum auf der Fläche liegt, d. h. also

$$y_c = \pm\frac{\beta p}{\gamma\lambda_2};\ \ z_c = \frac{\beta^2 p^2}{2p\gamma\lambda_2} = \frac{p}{2}\,\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Die beiden Punkte, welche bei entgegengesetztem y in der x-Ebene liegen, liegen in gleichem Abstand von der z-Ebene.

Aufgabe 12. Die Kreispunkte aus der Gleichung $d\delta = \zeta_c^2$ zu bestimmen.

Aufgabe 13. Die Kreisschnitte mit Hilfe der Kugel als Spezialfläche zu bestimmen.

Es ergiebt sich, da die Kugelform für orthogonale Koordinatensysteme keine Produkte von Koordinaten enthält, dafs einer der Richtungsfaktoren von E z. B. $\alpha = 0$ werden mufs; wir setzen

$$\gamma z = -(\beta y + d);\ \gamma^2 z^2 - (\beta y + d)^2 = E(s)\,E'(s) = 0$$

$$G(s) + EE' = \lambda_1 x^2 + y^2(\lambda_2 - \beta^2) + \gamma^2 z^2 + 2pz - 2\beta y d - d^2 = 0,$$

also

$$\lambda_2 - \beta^2 = \lambda_1;\ \ \gamma^2 = \lambda_1,$$

hieraus

$$b_{33}^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};\ \ b_{23}^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}.$$

Aufgabe 14. Die Koordinaten des Centrums der Kreise mittelst der Kugel zu bestimmen.

Das Kugelcentrum hat die Koordinaten

$$\xi = 0; \quad \eta = \frac{\beta d}{\lambda_1}; \quad \zeta = -\frac{p}{\lambda_1};$$

ferner für den Kugelradius

$$\varrho^2 = \frac{d^2 \lambda_2 + p^2}{\lambda_1}.$$

Das vom Kugelcentrum gefällte Lot hat die Gleichung $\frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma}$ und schneidet die Ebene $\beta y + \gamma z + d = 0$ im Centrum des Schnittkreises.

Aufgabe 15. Zu beweisen: zwei Schnitte je einer Schar liegen auf einer Kugel.

VII. Abschnitt.

Die Reyeschen Achsen der Paraboloide.

§ 26. Die Reyeschen Achsen.

Die Gleichung der Normale ist, wenn x′ der Berührungspunkt

$$1)\qquad \frac{x - x'}{\lambda_1 x'} = \frac{y - y'}{\lambda_2 y'} = \frac{z - z'}{p}$$

und eben dies ist auch (vgl. § 7 S. 60) die Gleichung einer Reyeschen Achse mit dem Pol $P\{x'$. Die Gleichung der konjugierten Ebene ist dann die der Polarebene, d. h. $\lambda_1 x x' + \lambda_2 y y' + p(z + z') = 0$. Es ist 1), wenn x′ nicht auf der Fläche, die Gleichung der Normalen der homothetischen Fläche $G(s) - \pi = 0$, wenn wir mit π die Potenz des Poles in Bezug auf die gegebene Fläche bezeichnen; der Achsenkomplex ist also, wie bereits § 29 bewiesen, identisch mit dem Komplex der Normalen der homothetischen Flächenschar $G(s) = k$.

Aufgabe 1. Die homothetische Schar eines Paraboloids besteht aus kongruenten Flächen.

Die Gleichungen der gegebenen und eine ihr homothetische k werden identisch, wenn man den Ursprung in der Flächen-(Cylinder-)Achse um $\frac{k}{2p}$ verschiebt. Die ganze Schar dieser Flächen kann man also als vom unendlich fernen Punkt des Paraboloids (auf der z-Achse) durch Parallelstrahlen projiziert betrachten. Dieser unendlich ferne Punkt tritt also in jeder Hinsicht an Stelle des Centrums der Centralflächen; ferner:

Der Achsenkomplex eines Paraboloids bleibt ungeändert, wenn man ihn in der Richtung der Flächenachse verschiebt.

Aufgabe 2. Die Grundbedingung der Achsen in Strahlenkoordinaten entweder direkt aus Aufgabe 3 § 7 oder aus der Gleichung des Pols abzuleiten:

$$2)\quad a = \lambda_1 x'; \; b = \lambda_2 y'; \; c = p; \; A = y'(p - \lambda_2 z'); \\ B = x'(\lambda_1 z' - p); \; C = x' y' (\lambda_2 - \lambda_1),$$

indem man für $x' = a : \lambda_1$ und für y' setzt $b : \lambda_2$

$$3)\qquad \frac{C}{ab} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \alpha^2 - \beta^2.$$

Aufgabe 3. Aus 3) den Satz zu beweisen:

Jede Parallele zur z-Achse ist Achse, für sie ist $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

Aufgabe 4. Die Gleichung 3) geometrisch zu interpretieren.

Es ist $\frac{C}{ab} = \frac{Cc}{abc} = \left(-\frac{A}{b} - \frac{B}{a}\right)\frac{1}{C}$, aber $-\frac{A}{b}$ ist die Strecke, welche die Projektion der Geraden auf die x-Ebene von der z-Achse abschneidet; $\frac{B}{a}$ die entsprechende Strecke für die y-Ebene, und da $C = p$, so heifst unsre Bedingung 3):

Die Differenz der Abschnitte, welche die Projektionen einer Achse auf die beiden Symmetrieebenen in der z-Achse bilden, ist konstant und gleich $p(\alpha^2 - \beta^2)$.

Aufgabe 5. Mit Ausnahme der beiden andern Hauptachsen und der ihnen parallelen steht keine Achse auf der Flächenachse z senkrecht.

Aufgabe 6. Aus der geometrischen Bedeutung von 3) folgt geometrisch, alle parallen Achsen liegen in einer Ebene; den Satz durch Rechnung zu beweisen (vgl. § 7 Aufgabe 8), es ist hier $A - A' = -p(z' - z'')$ etc. $C - C' = 0$, die Ebene ist also der z-Achse parallel.

Aufgabe 7. Die Pole aller parallelen Achsen liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 8. Die Projektion einer Achse auf die z-Ebene ist wieder eine Achse.

Aufgabe 9. Die reziproke Polare einer Achse a..A. Wir finden

$$\frac{x + \frac{A p^2 z'}{C \lambda_1}}{-\lambda_2 b} = \frac{y + \frac{B p^2 z'}{C \lambda_2}}{\lambda_1 a} = \frac{z}{ab(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Aufgabe 10. Die reziproken Polaren einer Schar paralleler Achsen bilden selbst eine Schar paralleler Achsen und ihre Ebene ist die Polarebene des in der ursprünglichen Achsenrichtung unendlich fernen Punktes.

Aufgabe 11. Den Pol auf der reziproken Polare einer gegebenen Achse, den reziproken Pol, zu bestimmen.

Wir finden $\xi' x' = \frac{p^2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}$; $\eta' y' = \frac{p^2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$, dagegen bleibt die Relation § 7 Aufgabe 14 für ζ' nicht gültig.

Aufgabe 12. Die Schar mit F homothetischer Flächen besitzen auf den identischen Achsen auch identische Pole. Die Fufspunkte dagegen variieren, denn die Polarebenen desselben Pols bilden eine Schar paralleler Ebenen.

Es ist vorteilhaft von einer beliebigen der Schar auszugehen und dagegen mit p zu dividieren, wodurch die Gröfsen λ_1 und λ_2 von der -1. Dimension werden, also die Gleichung der Schar wird

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2z = K$$

und die der Polarebene wird $\lambda_1 x' x + \lambda_2 y' y + (z + z') = K$. Dagegen geht in die Gleichung des Pols die Konstante K nicht ein.

Aufgabe 13. Die Fufspunkte auf einer Achse a, A zu bestimmen.

Wir haben $x_f = x' - \lambda_1 x_1 \varrho$; $y_f = y' - \lambda_2 y' \varrho$; $z_f = z' - \varrho$ wo $\varrho = G(x') : a^2 + b^2 + c^2 = G(x') : n^2$ und erhalten

$$x_f = bC + a\left(K - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{2B}{a}\right);$$

$$y_f = aC + b\left(K - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{2A}{b}\right);$$

$$z_f = aB - bA + K - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{B}{a}.$$

Aufgabe 14. Die Gleichung der Polarebene in den Koordinaten der Achse auszudrücken.

$$4)\quad a x + b y + z = K - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{B}{a} = K - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{A}{b}.$$

Die Bedingung 3) sagt aus, dafs alle Paraboloide koaxial, für welche $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}$ konstant ist, also ist das Schema einer solchen Schar, wenn $\frac{1}{\lambda} = l$

$$5)\quad \frac{x^2}{l_1} + \frac{y^2}{l_1 + \mu} + 2z = K$$

eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit; unter ihnen bilden diejenigen, für die μ dieselben Werte hat und auch l_1 unverändert bleibt, also nur K variiert, d. h. die homothetischen eine einfach unendliche Menge, dadurch charakterisiert, dafs sie koaxial und konpolar sind; eine zweite einfach unendliche Schar bilden diejenigen, für welche $K - l_1 = c_1$, $K - l_2 = c_2$ ist, ihr Schema ist

$$6)\quad \frac{x^2}{l_1 + \mu} + \frac{y^2}{l_2 + \mu} + 2z = \mu,$$

sie heifsen konfokal und sind koaxial und konnormal, d. h. dieselbe Gerade ist für alle Achse und besitzt für alle dieselbe zur Achse normale Polarebene.

Aufgabe 15. Jede Gerade einer der beiden Symmetrieebenen ist Achse für alle Flächen F^2, welche dieselben Symmetrieebenen haben.

Es ist für eine Gerade der x-Ebene $a = 0$ und $C = 0$.

---

§ 27. Der Achsenkegel.

Wir haben die Achsenkoordinaten spezialisiert, indem wir $c = p$ bezw. gleich 1 setzen; lassen wir sie allgemein, so haben wir für c zu setzen $z - \zeta$, wo ζ den festen Punkt $S\{\xi\eta\zeta$ bezeichnet, dann giebt 3), wenn wir die Konstante $l_1 - l_2$, welche für alle koaxialen Flächen unveränderlich ist, mit $\varkappa$ bezeichnen, $C(z - \zeta) = a b \varkappa$ oder als Gleichung des Achsenkegels

$$7)\quad (x\eta - y\xi)(z - \zeta) + \varkappa(x - \xi)(y - \eta) = 0.$$

Der Achsenkegel ist also vom zweiten Grade und für alle koaxialen Flächen identisch.

Aufgabe 1. Jeder Achsenkegel enthält die drei parallelen zu den Hauptachsen des Paraboloids durch die Spitze.

Der Kegel ist also wieder gleichseitig.

Aufgabe 2. Die Hauptachsengleichung des Achsenkegels.

Verlegt man den Ursprung in die Spitze, so hat man sofort

$$(x\eta - y\xi)\, z - \varkappa x y = 0 = 2\varkappa x y - 2 x z \eta + 2 y z \xi = 0$$

und da $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, $\alpha_{11} = -\xi^2$, $\alpha_{22} = -\eta^2$, $\alpha_{33} = -\varkappa^2$, so ergiebt sich

$$\lambda^3 - \lambda\,(\xi^2 + \eta^2 + \varkappa^2) - 2\,\xi\,\eta\,\varkappa = 0.$$

Es ist dies die wohlbekannte in algebraischen Problemen (vgl. auch Teil 1) so oft vorkommende Gleichung und man sieht (vgl. Lampe, Geom. Aufgaben zu den kubischen Gleichungen):

Die Hauptachsen jedes Achsenkegels sind den Radien des Umkreises der drei Dreiecke proportional, für welche die Kosinus der Winkel sich verhalten wie $\xi : \eta : \varkappa$ bezw. deren Centrum von den Seiten die Abstände $\xi, \eta, \varkappa$ hat.

Aufgabe 3. Für welche Punkte zerfällt der Achsenkegel? Wenn $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ (oder beides), d. h. also für die Punkte der beiden Symmetrieebenen. Die eine Ebene ist dann die Symmetrieebene, die andere auf ihr senkrecht.

Aufgabe 4. Wann zerfällt der Achsenkegel für jeden Punkt?

Wenn $\varkappa = 0$ ist, d. h. wenn die F^2 ein Rotationsparaboloid, die eine Ebene ist dann auf der Rotationsachse z senkrecht, die andere ihr parallel.

Aufgabe 5. Ort der Pole des Achsenkegels?

Wir haben für die Pole x die Gleichungen der Cylinder $\frac{x - \xi}{\lambda_1 x} = \frac{y - \eta}{\lambda_2 y} = z - \zeta$ und den Kegel 7). Der Kegel hat mit jedem der Cylinder je eine Parallele zu den Hauptachsen der F^2 durch $S\,\{\xi\,\eta\,\zeta$ gemeinsam, welche nicht auf

den andern Cylindern liegen, also dem Ort nicht angehören; **der Ort ist also eine Raumkurve dritten Grades**, deren Projektionen auf die Koordinatenebenen Hyperbeln sind, deren Asymptoten den Achsen der F^2 parallel sind, also gleichseitig. (Hyperbeln des Apollonius).

Aufgabe 6. Ort der Pole für einen Punkt auf der Symmetrieebene, z. B. $\eta = 0$.

Für die Achsen in der Symmetrieebene $\eta = 0$ ist es die Hyperbel $x - \xi = \lambda_1 x (z - \zeta)$; für die Achsen in der Ebene $\xi z - \varkappa x = 0$ die Gerade $x - \xi = \frac{\xi}{\lambda_2 \varkappa}$, $z - \zeta = \frac{1}{\lambda_2}$.

Aufgabe 7. Wieviel Normalen eines Paraboloids gehen durch einen Punkt?

Die Raumkurve der Pole, zu denen die Fufspunkte gehören, schneidet die Fläche in sechs Punkten, aber da zu diesen Schnittpunkten und Fufspunkten stets der unendlich ferne der Fläche gehört, so bleiben generaliter nur fünf, welche ihren Fufspunkt im Endlichen auf der Fläche haben.

Aufgabe 8. Formiere die Gleichung, von der die Fufspunkte der Normalen durch einen gegebenen Punkt x abhängen.

Wir haben

$$\frac{x - \xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{y - \eta}{\lambda_2 \eta} = z - \zeta = \tau$$

oder

$$\xi = \frac{x}{1 + \lambda_1 \tau}; \quad \eta = \frac{y}{1 + \lambda_2 \tau}; \quad \zeta = \tau + z$$

also, da $\xi \eta \zeta$ auf der Fläche,

$$\frac{\lambda_1 x^2}{(1 + \lambda_1 \tau)^2} + \frac{\lambda_2 y^2}{(1 + \lambda_2 \tau)^2} + 2 (z + \tau) = 0.$$

Dies ist für τ eine Gleichung fünften Grades.

Aufgabe 9. Der Ort der Fufspunkte der Achsen des Achsenkegels.

Wir haben in den allgemeinen Strahlenkoordinaten der Achse für die Polarebene

$$8) \qquad x a + y b + z c + c (l_2 + B : a) = 0,$$

wo die Konstante auch gleich $c (l_1 - A : b)$ ist und die Gleichung

$$7) \qquad C c = a b \varkappa$$

und hierin für a zu setzen $\xi - x$, für $A = y\zeta - z\eta$, $B = z\xi - x\zeta$, $C = (x\eta - y\xi)$ bezw. für a „$x - \xi$“, für C dann $y\xi - x\eta$.

Wir erhalten also für den Ort den Schnitt der Fläche dritten Grades 8) und des Kegels 7), eine Raumkurve sechsten Grades; aber 8) und 7) verschwinden für $c = 0$ und $a = 0$, d. h. für die Gerade $x = \xi$, $z = \zeta$, und in der zweiten Form der Konstante für $y = \eta$, $z = \zeta$. Diese Gerade gehört also nicht zum Ort und derselbe reduziert sich auf eine Raumkurve fünften Grades.

Aufgabe 10. Für wieviel Achsen ist ein gegebener Punkt x der Fuſspunkt?

Wir haben nach Aufgabe 8, wenn x' der Pol ist und x der Fuſspunkt,

$$x' = x : (1 + \lambda_1 \tau); \quad y' = y : (1 + \lambda_2 \tau); \quad z' = z - \tau$$

und bestimmen aus der Gleichung der Polarebene τ durch

$$\frac{\lambda_1 x^2}{1 + \lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_2 y^2}{1 + \lambda_2 \tau} + 2z - \tau = 0$$

bezw.

$$9) \qquad \frac{x^2}{l_1 + \tau} + \frac{y^2}{l_2 + \tau} + 2z - \tau = 0.$$

Das ist aber wieder (vgl. 6) die Gleichung des konfokalen Systems und bestimmt für τ drei Werte, die drei Achsen stehen wieder aufeinander senkrecht und wir haben den Satz

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei aufeinander normale Achsen, für die er der Fuſspunkt ist.

Daraus folgt, daſs die Raumkurve der Fuſspunkte in der Spitze des Achsenkegels einen dreifachen Punkt hat.

Aufgabe 11. Was wird aus der Fuſspunktenkurve, wenn die Spitze S in einer Symmetrieebene liegt?

Ist z. B. $\eta = 0$, so zerfällt der Achsenkegel in die Ebenen $y = 0$ und $\xi(z - \zeta) = \varkappa(x - \xi)$. Wir haben als Ort der Fuſspunkte der Achsen in $y = 0$ sofort, da $y = 0$, $b = 0$, $B = x\zeta - y\xi$ ist, die Kurve dritten Grades

$$a(xa + zc) + c(l_2 a + B) = 0,$$

welche im Punkte S einen Doppelpunkt hat.



Für die Achsen der Ebene $\xi(z-\zeta) = \varkappa(x-\xi)$ ist $A:b = -\zeta$; $b = y$ und 8) geht über in

10) $x(x-\xi) + y^2 + z(z-\zeta) + c(l_1+\zeta) = 0.$

Die Fläche 8) ist in diesem Falle eine Kugel und der Ort als Schnitt einer Kugel und der Ebene ein Kreis, der durch S hindurchgeht und die y-Ebene zur Symmetrieebene hat. Der Radius der Kugel wird gegeben durch

$$r^2 = \frac{\xi^2}{4} + \zeta^2 + \frac{l_1^2}{4} + \zeta l_1$$

und die Konstruktion der Achsen des Herrn Schilke bleibt auch für die Paraboloide.

Aufgabe 12. Der Schnittpunkt einer Achse mit einer Symmetrieebene und die Schnittgerade einer Polare mit ihr sind wieder Pol und Polare in Bezug auf einen in der Ebene liegenden festen Kegelschnitt.

Für den Schnittpunkt einer Achse des Pols x' haben wir für $y = 0$, $x_s = \lambda_1 x' \varkappa$, $z_s = z' - l_2$, die Schnittgerade ist $\frac{x x_s}{\varkappa} + z + z_s + l_2 = 0$. Verschieben wir den Ursprung auf der z-Achse so, daſs das neue z, es sei Z, gleich $z + \frac{1}{2} l_2$, so ist die Gerade $x x_s + \varkappa(Z + Z_s) = 0$, und dies ist die Polare der Parabel $x^2 + 2\varkappa Z = 0$. Ebenso finden wir für den Schnitt mit der Ebene $x = 0 : y_3 = -\lambda_2 y' \varkappa$, $z_s = z' - l_1$ und $-y y_s + \varkappa(z + z' + l_1) = 0$. Verschieben wir den Ursprung nach dem Punkt $z = -\frac{1}{2} l_1$, so haben wir Pol und Polare für die Parabel $y^2 - 2\varkappa Z = 0$. Diese beiden kongruenten Parabeln heiſsen wieder die Fokalkurven der Paraboloids. Jeder ihrer Punkte heiſst ein Fokalpunkt, die Brennpunkte der Parabeln selbst die Hauptbrennpunkte.

---

§ 28. Die Fokaleigenschaften der Paraboloide.

Aufgabe 1. Die Schar

1) $$\frac{x^2}{l_1+\mu} + \frac{y^2}{l_2+\mu} + 2z - \mu = 0$$

besitzt dieselben beiden Fokalparabeln (Aufgabe 14 § 19). Daher heiſst sie konfokal.

Aufgabe 2. Der Brennpunkt der einen Fokalparabel ist der Scheitel der andern.

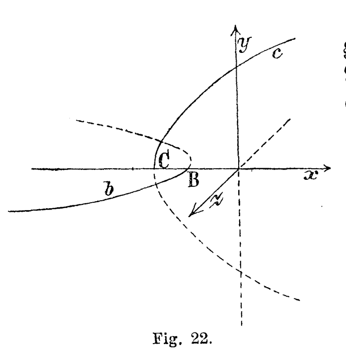


Fig. 22.

Das Koordinatensystem ist gegen die sonstige Lage um 90^0 gedreht. Demnach hat also die Parabel in der y-Ebene die Parabel-Achse nach links gerichtet, und die Parabel in der x-Ebene die Achse im (positiven) rechten Zweig der z-Achse.

Aufgabe 3. Was wird aus den Fokalparabeln, wenn die ursprüngliche Fläche ein Rotationsparaboloid?

Dann besteht die ganze Schar aus Rotationsparaboloiden, und die Fokalparabeln arten je in den linken und rechten Strahl der z-Achse aus; die beiden Hauptbrennpunkte fallen in den Brennpunkt der Meridianparabel zusammen.

Aufgabe 4. Die Schnittkurven der Schar 1) mit einer der beiden Symmetrieebenen bilden eine Schar konfokaler Parabeln.

Aufgabe 5. Die Ebene, welche im Berührungspunkte einer Tangente der Fokalkurve auf der Tangente senkrecht steht, schneidet die Schar konfokaler Flächen in Kegelschnitten, deren einer Brennpunkt der Berührungspunkt ist.

Beweis wörtlich wie Aufgabe 2 § 20, ganz analog ist die Rechnung.

Aufgabe 6. Die Gleichung der Fokalkegel.

Vgl. § 20 Aufgabe 4 für den Kegel über der Fokallinie in $y = 0$ ist $y' = 0$, $x' = \frac{-C'}{b}$; $z' = \frac{A'}{b}$, $b = (y - \eta)$, also haben wir

$$\text{a)} \quad \frac{(x\eta - \xi y)^2}{l_1 - l_2} - 2(z\eta - y\zeta)(y - \eta) + (y - \eta)^2 l_2 = 0$$

und ebenso für den Kegel in $x = 0$

$$\text{b)} \quad \frac{(x\eta - \xi y)^2}{l_2 - l_1} - 2(z\xi - x\zeta)(x - \xi) + (x - \xi)^2 l_1 = 0.$$

Liegt P in der Ebene $\eta = 0$, so reduziert sich a) auf $y^2\left(\frac{\xi^2}{l_1 - l_2} + 2\zeta + l_2\right) = 0$, d. h. auf die Doppelebene $y = 0$ und ist wieder für jeden Punkt auf der Fokalparabel an sich unbestimmt; Herr Staude, der die Theorie der Fokaleigenschaften der F^2 gegeben hat, sieht auch hier wieder das ebene Strahlenbüschel als Fokalkegel des Punktes der Fokalkurve an.

Aufgabe 7. Die Hauptachsen der Fokalkegel sind die drei Reyeschen Achsen, deren Fufspunkt die Spitze ist. (Staude.)

Aufgabe 8. Die Flächen der konfokalen Schar zu klassifizieren.

Der konstituierenden Gleichung geben wir die Form

$$\text{a)} \qquad \frac{x^2}{l_1 - \tau} + \frac{y^2}{l_2 - \tau} + 2z + \tau = 0,$$

wobei wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, 1) $l_1 \geqq l_2$, 2) $l_2 > 0$. τ laufe von $-\infty$ bis $+\infty$

1) $\tau = -\infty$. Es mufs in homogenen Koordinaten $2zs_4 + \tau s_4^2 = 0$ sein, also $s_0^2 = 0$, die Fläche reduziert sich auf die (doppelte) unendlich ferne Ebene.

2) τ zwischen $-\infty$ und l_2; beide Hauptachsen > 0, elliptische Paraboloide, und zwar liegen dieselben ganz nach der negativen Seite der z-Achse (in der Figur links).

3) $\tau = l_2$. Um einen Sinn für a) zu erhalten, mufs $y = 0$ gesetzt werden; wir haben also die Doppelebene $y = 0$ und in ihr die Fokalparabel, der sich die linkselliptischen Paraboloide von allen Seiten her von innen nähern. Wir sind aber ebenso berechtigt, $\tau = l_2$ zu der folgenden Klasse zu zählen.

4) $l_2 \leqq \tau < l_1$, da die Achse λ_2 negativ, so giebt dies hyperbolische Flächen; als Grenzfall nehmen wir die Ebene $y = 0$, so weit sie aufserhalb der Fokalparabel liegt.

5) $\tau = l_1$; das Äufsere der rechten Fokalparabel, wenn wir die Fläche $x^2 = 0$ noch zu den Hyperboloiden, das innere, wenn wir sie zur folgenden Klasse rechnen.

6) $l_1 \angle \tau \angle \infty$ Elliptische Paraboloide, bei der die Achsenrichtung der z-Achse für reelle Punkte umgekehrt liegt, nur rechts Elliptische.

7) $\tau = +\infty$, die unendlich ferne Ebene.

Aufgabe 9. Der unendlich ferne Punkt des Paraboloids F^2 ist der ganzen konfokalen Schar gemeinsam (denn sie sind koaxial und konnormal); auch rechnerisch, in homogener Form ist $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_4 = 0$ eine Lösung jeder Flächengleichnng $G(s) = 0$.

Aufgabe 10. Die ganze Schar zerfällt in zwei kongruente Hälften, so daſs für zwei entsprechende sich die groſse und kleine Achse vertauschen, sowie die positive Richtung der z-Achse.

Sollte $l_1 - \tau = l_2 - \tau_1$ sein, so wären die Paraboloide nicht kongruent, wohl aber, wenn man $l_1 - \tau = -l_2 + \tau_1$ setzt, $\tau + \tau_1 = l_1 + l_2$; und indem man die x- und y-Achse vertauscht, und für z einführt $z' = -z - \frac{l_1 + l_2}{2}$ geht die Fläche τ' in die Fläche τ über.

Die linke Hälfte umfaſst die links Elliptischen F^2 und die Hyperbolischen zwischen $\tau = l_2$ und $\tau = \frac{l_1 + l_2}{2}$, die rechte die Hyperbolischen für die τ zwischen $\frac{l_1 + l_2}{2}$ und l_1 und die rechts Elliptischen. Sich selbst entspricht das Paraboloid $\tau = \frac{l_1 + l_2}{2}$; es hat den Punkt, der in der reduzierten Form $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2z = 0$ der Nullpunkt ist, den Scheitel, gerade in der Mitte zwischen beiden Hauptbrennpunkten; die Scheitel je zweier kongruenter Flächen liegen symmetrisch zu dieser Mitte.

Aufgabe 11. Durch jeden Punkt, der nicht auf einer Symmetrieebene liegt, geht von jeder Schar je eine Fläche.

Die linke Seite der Gleichung a) als Funktion von τ betrachtet ist $-\infty$ für τ gleich $-\infty$, ist für τ gleich $l_2 - \varepsilon$, wo ε äuſserst klein $+\infty$, ist $-\infty$ für $l_2 + \varepsilon$ und $+\infty$ für $l_1 - \varepsilon$, und $-\infty$ für $l_1 + \varepsilon$ und $+\infty$ für τ gleich $+\infty$, also liegt eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und l_2, eine zweite zwischen l_2 und l_1, eine dritte zwischen l_1 und $+\infty$.

Aufgabe 12. Die drei konfokalen Paraboloide desselben Punktes schneiden sich normal.

Beweis wie Aufgabe 10 § 20.

Man kann grade, wie man elliptische Koordinaten einführt, auch die drei Werte von τ als parabolische Koordinaten einführen. Während aber die elliptischen sich für höhere Mechanik und mathematische Physik als unentbehrliches Hilfsmittel entwickelt haben, sind die parabolischen bisher wenig verwertet worden. Wir verweisen für sie auf das oft erwähnte Werk von Staude.

Aufgabe 13. Die rechte Fokalparabel schneidet die linken, die linke Fokalparabel die rechten elliptischen Flächen in den Kreispunkten.

Aufgabe 14. Zusammenhang der parabolischen mit den kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 15. Satz von Staude (Analogie der Dupinschen Sätze).

Für alle Punkte der einen Fokalparabel ist die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten der andern konstant.

Aufgabe 16. Die koaxiale (einfach unendliche) Schar

$$\frac{x^2}{\tau} + \frac{y^2}{\tau - k} + 2z = 0$$

zu betrachten. Diese Schar ist zuerst von Robert Burg (z. Z. in Frankfurt a. M.) im Reyeschen Seminar 1889 behandelt, und es fanden sich dort den Staudeschen sehr ähnliche Betrachtungen über die Grenzfälle, die Schar besitzt kongruente Fokalparabeln, aber nicht dieselben Brennpunkte.

Aufgabe 17. Satz von Burg: Schneiden sich zwei Paraboloide der Schar (ein Elliptisches und ein Hyperbolisches), so besteht die Schnittkurve aus zwei Parabeln, deren Ebenen sich in der gemeinsamen Flächenachse schneiden.

---

§ 29. Die Gestalt der beiden Paraboloide.

Das Elliptische Paraboloid (Fig. 23) habe die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{l_1} + \frac{y^2}{l_2} - 2z = 0,$$

wo $l_1 > l_2 > 0$. Die Fläche hat die Symmetrieebenen

$x = 0$, in der die Fokalparabel a liegt, und $y = 0$, in der die Fokalparabel b liegt. Die z-Ebene ist Tangentiale im Scheitel $S \} 0, 0, 0$. Die Schnitte parallel $z = 0$ sind ähnliche Ellipsen mit stets wachsenden Achsen (Fig. 23), deren Centren auf der Flächenachse liegen. Der Hauptschnitt $y = 0$ ist die Parabel $x^2 = 2 z l_1$, deren Achse

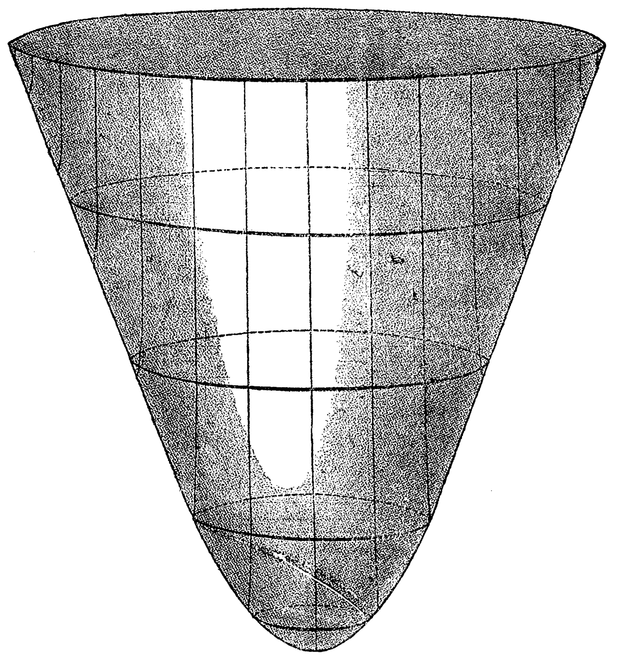


Fig. 23.

die Flächenachse, deren Scheitel S ist, deren Brennpunkt einer der Hauptbrennpunkte ist. Der Hauptschnitt $x = 0$ ist die Parabel $y^2 = 2 l_2 z$, deren Scheitel ebenfalls S ist, deren Brennpunkt der andere Hauptbrennpunkt ist.

Die Schnitte parallel der y-Ebene sind kongruent dem Schnitt der y-Ebene, also verschiebt sich die Parabel des Hauptschnitts parallel; ebenso sind die Schnitte parallel der x-Ebene dem Hauptschnitt kongruent, also (Fig. 24):

Das elliptische Paraboloid wird erzeugt durch eine Parabel, deren Scheitel sich auf einer festen

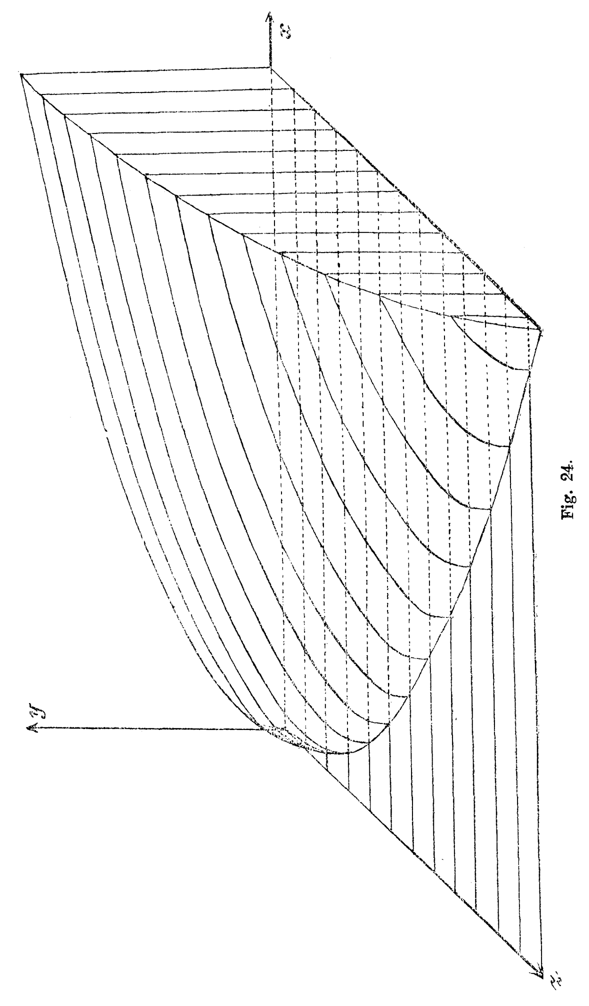


Fig. 24.

Parabel so bewegt, dafs die Achsen parallel und gleichgerichtet sind, die Ebenen der festen und beweglichen Parabel aufeinander senkrecht stehen,

und die Ebene der beweglichen sich parallel verschiebt.

Das Elliptische Paraboloid kann als im Unendlichen geschlossen angesehen werden, da der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = \infty$ der einzige reelle Punkt im Unendlichen ist. Schon daraus folgt, daſs hyperbolische Schnitte nicht existieren, und daſs parabolische der z-Achse parallel sein müssen.

Die Kreisschnitte sind der x-Achse parallel, also senkrecht auf der x-Ebene, liegen symmetrisch zu den beiden andern Achsen, und schlieſsen mit der z-Ebene Winkel ein bestimmt durch $\cos\beta = +\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$ und $\cos\beta' = -\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$.
Die zugehörigen Kreispunkte haben die Koordinaten

$$x = 0,\ y = +\sqrt{l_2(l_1 - l_2)},\ 2z = (l_1 - l_2)$$
$$\text{und } x = 0,\ y = -\sqrt{l_2(l_1 - l_2)},\ 2z = l_1 - l_2.$$

Das hyperbolische Paraboloid hat die Gleichung

$$2)\qquad \frac{x^2}{l_1} - \frac{y^2}{l_2} - 2z = 0.$$

Die Schnitte mit den Hauptebenen $x = 0$ und $y = 0$ sind Parabeln $x^2 = 2l_1 z$, $y^2 = -2l_2 z$, d. h. die Achsen der Parabeln liegen entgegengesetzt, ihre Brennpunkte sind die Hauptbrennpunkte, sie berühren sich im Scheitel S.

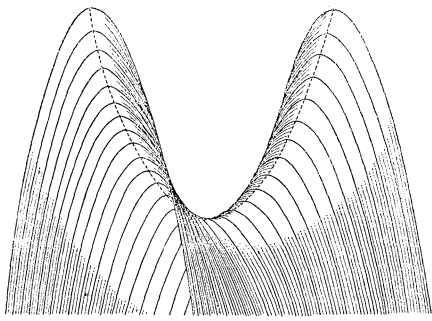


Fig. 25.

Aufgabe 1. Die Fläche wird erzeugt wie das elliptische Paraboloid, nur daſs die Achsen der festen und der beweglichen Parabel entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 25).

Aufgabe 2. Der Schnitt $z = 0$ ist die in ihre Asymptoten zerfallende Hyperbel

$$\left(\frac{x^2}{l_1} - \frac{y^2}{l_2}\right) = 0 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = g_0 \cdot h_0$$

wo $a = l_1^{\frac{1}{2}}$, $b = l_2^{\frac{1}{2}}$ und $g_0 \left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,\right.$ $h_0 \left\{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.\right.$

Aufgabe 3. Die Gleichung der Fläche, wenn g_0 zur ξ-Achse, h_0 zur η-Achse gewählt wird und die z-Achse bleibt

$$\frac{2\,\xi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}; \quad \frac{2\,\eta}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b};$$

also

$$3) \qquad 2\,\xi\,\eta = z\,(l_1 + l_2).$$

Aufgabe 4. Die Schnitte der Fläche parallel zur z-Ebene sind Hyperbeln, deren Asymptoten g und h parallel sind. Die Hyperbeln sind gleichseitig, wenn $l_1 = l_2$ (in der Achsengleichung $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$), dann heifst die Fläche gleichseitig.

Aufgabe 5. Der Schnitt der Fläche durch eine Ebene, welche der z-Achse nicht parallel ist, ist eine Hyperbel. (Achsengleichung des Schnitts).

Aufgabe 6. Die Geraden auf der Fläche.

Setzt man

$$1) \quad g = 2\,\varrho; \; \varrho\,h = z$$
$$2) \quad g = \sigma\,z; \; \sigma\,h = 2$$

wo ϱ und σ zwei willkürliche Parameter sind, so liegen sowohl die Geraden, in denen sich die Ebenen der Schar 1) schneiden, als die, in denen sich die Ebenen der Schar 2) schneiden, auf der Fläche. Umgekehrt folgt, dafs jede Gerade, welche auf der Fläche liegt, zu einer der beiden Scharen gehört, und zwar ohne Mühe, wenn man die Gerade bestimmt durch den Punkt, in dem sie die z-Ebene schneidet, und ihre Richtungsfaktoren.

Das hyperbolische Paraboloid gehört also zu den geradlinigen Flächen (s. Fig. 26), die Ebenen jeder Schar sind unter sich durch die gleichen Parameter projektiv bezogen, es kreuzen sich also die Geraden jeder Schar unter sich, während jede Gerade der einen Schar jede Gerade der andern schneidet.

Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Gerade.

Aufgabe 7. Die Projektionen der Geraden der Schar 1) auf die z-Ebene sind alle parallel der Geraden g_0, die der Geraden der Schar 2) alle parallel der Geraden h_0.

Aufgabe 8. Die Ebenen zu bestimmen, welche aus der Fläche nur eine Gerade ausschneiden. Es mufs $b_{32} = 0$, $b_{13}^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ sein, es sind also die Ebenen der Schar $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\varrho$ und $\sigma\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = -2$.

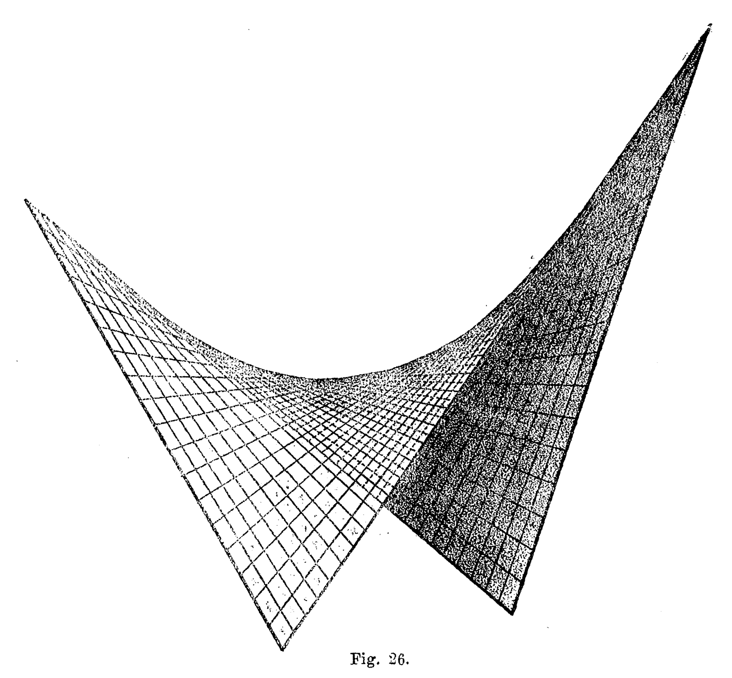


Fig. 26.

Aufgabe 9. Durch einen Punkt P der Fläche eine Ebene dieser Schar zu legen.

Man projiziert P auf die z-Ebene in P′, zieht durch P′ zu g_0 bezw. h_0 die Parallele g′ bezw. h′ und legt durch P′ und g′ bezw. P′ und h′ die Ebene. Die eine schneidet aus der Fläche die Gerade g der Schar 1), die andre die Gerade h der Schar 2).

Aufgabe 10. Da jede Gerade ihre eigne Tangente ist, so ist die Ebene durch g und h die Tangentiale, es soll dies durch Rechnung gezeigt werden.

Aufgabe 11. Die Tangentialebene in P durch die Linie g und h zu konstruieren.

Da die Gerade g ganz in der zur z-Ebene normalen Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -2 p \varrho$ liegt und die Ebene $z = 0$ im Punkte $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, d. h. auf h_0 schneidet, so ergiebt sich die Konstruktion (s. Fig. 27).

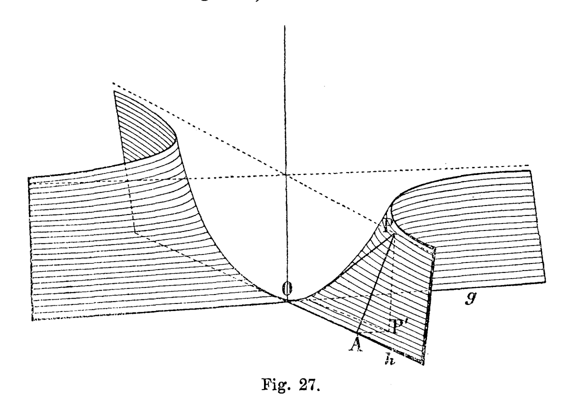


Fig. 27.

Fälle von P auf die Ebene $z = 0$ das Lot PP', ziehe durch PP' die Parallele g', zu g_0 schneidet h_0 in A, so ist AP die Gerade g; entsprechend wird h konstruiert.

Aufgabe 12. Wann artet die Schnittparabel durch eine Parallele zur z-Ebene in eine Gerade aus?

Für die Ebenen $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = c$.

Aufgabe 13. Wann stehen g und h aufeinander senkrecht?

Wenn die gleichseitigen Hyperbeln, welche eine Ebenenschar, die beiden parallel ist, ausschneidet, in ihre Asymptoten übergeht.

Diese Ebenenschar sind den Tangentialebenen des Kegels $\frac{x^2}{\lambda_2} + \frac{y^2}{\lambda_1} + \frac{z^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0$ parallel; es mufs also eine Tan-

gentialebene der Fläche F^2 in einem solchen Orthogonalpunkte $P \{ x'$ einer Tangentialebene dieses Kegels parallel sein im Punkte $\varrho \xi'$. Die Richtungsfaktoren müssen proportional sein. Das giebt

$$\lambda_1 x' = \frac{\xi'}{\lambda_2}; \quad \lambda_2 y' = \frac{\eta'}{\lambda_1}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\zeta'$$

also nach Division mit $\lambda_1 \lambda_2$

$$\frac{x^2}{l_1} - \frac{y^2}{l_2} + (l_1 - l_2) = 0.$$

Die Orthogonalpunkte eines hyperbolischen Paraboloids liegen auf dem Asymptotencylinder mit der Konstante $l_1 - l_2$.

Die Orthogonalpunkte eines hyperbolischen Paraboloids liegen auf der Ebene $z = -\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right)$, Ebene von Monge. Die Orthogonalpunkte bilden die Hyperbel

$$\frac{\mathbf{x}^2}{l_1} - \frac{\mathbf{y}^2}{l_2} = l_1 - l_2 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{z} = -\frac{l_1 - l_2}{\mathbf{2}}.$$

Ist das Hyperboloid gleichseitig, so liegt die Hyperbel in der Ebene $z = 0$ und ist das Asymptotenpaar $g_0 h_0$. Die Hyperbel selbst ist dann gleichseitig.

Die Ebene der Orthogonalhyperbel ist für alle koaxialen Paraboloide konstant, und die Hyperbel behält ihre Bedeutung und Lage auch für die elliptischen Paraboloide, nur geht sie in die imaginäre Ellipse $\frac{x^2}{l_1} + \frac{y^2}{l_2} + l_1 + l_2 = 0$ über.

Jeder Punkt des Cylinders $\frac{x^2}{l_1} - \frac{y^2}{l_2} + l_1 - l_2 = 0$ ist Centrum eines gleichseitig hyperbolischen Schnitts des hyperbolischen Paraboloids. Für die gleichseitige Fläche geht dieser Cylinder in den Asymptotencylinder über.

Der Cylinder bleibt für die homothetische Schar unverändert.

Aufgabe 14. Ort der Orthogonalhyperbeln für die homothetische Schar.

Aufgabe 15. Ort dieser Hyperbeln für die konfokale Schar

$$\frac{x^2}{l_1 - \mu} + \frac{y^2}{l_2 - \mu} - 2z + \mu = 0.$$

Wir setzen $\zeta = z - \frac{\mu}{2}$, haben dann für die Hyperbel, da für sie $\zeta = -\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right) = \frac{\varkappa}{2}$ ist, $\mu = 2z + \varkappa$, also die Fläche dritten Grades, Orthogonalfläche

$$\frac{x^2}{l_1 - 2z - \varkappa} + \frac{y^2}{l_2 - 2z - \varkappa} + \varkappa = 0.$$

Aufgabe 16. Was wird aus dieser Fläche, wenn das Paraboloid gleichseitig?

Aufgabe 17. Den Schnitt der Orthogonalfläche mit einem bestimmten Gliede der Schar zu untersuchen.

Schaffen wir die Nenner weg und benennen $2z + \varkappa$ mit ζ, so findet man mühelos, wenn die Fläche dann $f(xy\zeta)$ genannt wird und die F^2 $\varphi(xy\zeta)$

$$f - \varphi = (\mu - \zeta)(x^2 + y^2 - \zeta k + n),$$

wo $n = -(l_1 - \mu)(l_2 - \mu) + \varkappa(l_1 + l_2 - \mu)$ ist. Also: 1) der Schnitt ist wie a priori klar, die betreffende orthogonale Hyperbel, 2) geht durch den Schnitt das Rotationsparaboloid $x^2 + y^2 - \zeta k + n = 0$.

VIII. Abschnitt.

Die Kubatur der Flächen zweiten Grades.

§ 30. Die Kubatur der centralen Fläche.

Die Kubatur der F^2 wird meist auf die Simpsonsche, richtiger Newton-Cotessche Regel gegründet. Die Ableitung der Regel ist aber nicht einfacher als die direkte Kubatur.

Wir zerschneiden die Körper durch Parallelschnitte zu einer Hauptebene in Schichten, die, wenn die Schnitte hinlänglich dicht aufeinander folgen, als Cylinder betrachtet werden können. Sei die Fläche das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Grundfläche sei der Hauptschnitt $z = 0$, parallel zu ihm legen wir den Schnitt $z = h$, teilen h in n gleiche Teile, legen durch die Teilpunkte Parallelen zur z-Ebene, lassen n über jedes Maſs wachsen, dann weicht die Schicht von dem Cylinder, dessen Grundfläche der Schnitt und dessen Höhe $\frac{h}{n}$ ist, nur um eine in Bezug auf die Schicht selbst verschwindend kleine Gröſse ab. Wir können also die Körperzone zwischen $z = 0$ und $z = h$ als Summe der Cylinder ansehen. Die k-te Cylinderschicht hat zur Grundfläche die Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{1 - \frac{h^2 k^2}{n^2 c^2}}$, $b\sqrt{1 - \frac{h^2 k^2}{c^2 n^2}}$, ihr Inhalt ist also $ab\pi\left(1 - \frac{h^2 k^2}{c^2 n^2}\right)$ und der Cylinder $C_k = ab\pi\left(1 - \frac{h^2 k^2}{c^2 n^2}\right)\frac{h}{n}$ und die Zone

$$Z_h = ab\pi \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{h}{n} - \frac{k^2 h^3}{c^2 n^3} = ba\pi h\left(1 - \frac{h^2}{c^3}\sum \frac{k^2}{n^3}\right)$$

Die letzte Summe ist, wie aus der Volumberechnung der Pyramide in der elementaren Stereometrie bekannt, wenn n über jedes Maſs groſs ist, gleich $\frac{1}{3}$, also

$$1)\qquad Z_h = a\,b\,\pi\,h\left(1 - \frac{h^2}{3\,c^2}\right)$$

also: Für die Zone des Ellipsoids gilt dieselbe Formel wie für das Volumen der Kugelzone, abgesehen von der Verschiedenheit der Achsen.

Ist $h = c$, so erhält man für das halbe Ellipsoid $\frac{2}{3}\,a\,b\,c\,\pi$ und für das ganze

$$2)\qquad E = \tfrac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi.$$

Wie man beides auch hätte aus der affinen Verwandtschaft zwischen Kugel und Ellipsoid unmittelbar herleiten können als Aufgabe 1.

Aufgabe 2. Die Zone des einschaligen Hyperboloids zwischen der Kehlellipse und einer Parallelebene zu ihr im Abstande h.

Dieselbe Methode giebt

$$3)\qquad Z_h = a\,c\,\pi\,h\left(1 + \frac{h^2}{3\,b^2}\right).$$

Aufgabe 3. Das Stück des einschaligen Hyperboloids zwischen Kehlellipse und einer Parallele im Abstande der Achse ist gleich dem Ellipsoid mit denselben Achsen.

Aufgabe 4. Für das zweischalige Hyperboloid die Kappe zwischen $y = b$ und $y = b + h$ zu berechnen, wenn seine Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der Schnitt in der Höhe $b + \frac{h\,k}{n}$ hat zum Inhalt

$$i_k = a\,c\,\pi\left(\frac{2\,h\,k}{b\,n} + \frac{k^2\,h^2}{n^2\,b^2}\right)$$

und die Schicht ist $\frac{h}{n}\,i_k$, also

$$4)\qquad K_h = a\,c\,\pi\,h\left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{3\,b^2}\right) = \frac{a\,c\,\pi\,h^2}{3\,b^2}(3\,b + h)$$

und wenn $h = b$

$$5)\qquad K = \tfrac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi$$

also auch die Kappe des Hyperboloids mit zwei Schalen von der Höhe der positiven Achse ist gleich dem Ellipsoid, das dem absoluten Betrage nach dieselben Achsen hat.

Aufgabe 5. Die Kappe des Ellipsoids zwischen $y = b$ und $y = h$ zu berechnen.

Durch Subtraktion des Halbellipsoids und der Zone erhält man, wenn $b - h = d$ gesetzt wird

$$6) \qquad \frac{a c \pi d^2}{3 b^2} (3 b - d) = K_e$$

also dieselbe Formel wie für die Kugel und vom Hyperboloid nur durch das Zeichen verschieden.

Aufgabe 7. Die Formeln aus der gemeinsamen Form $\lambda_1 x^2 + \ldots = 1$ abzuleiten.

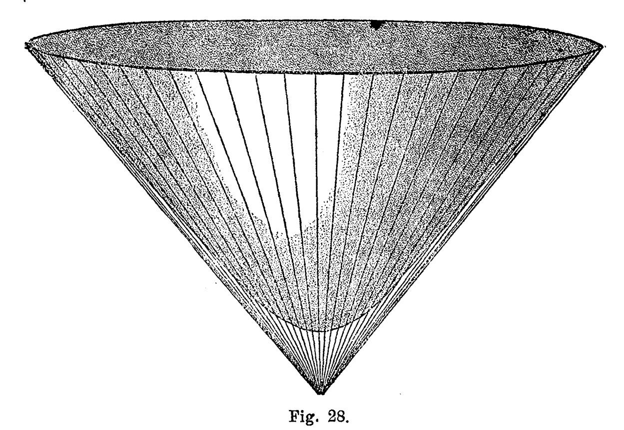


Fig. 28.

Aufgabe 8. Den Sektor des Ellipsoids, begrenzt von der Fläche der Kappe und den Vektoren vom Centrum nach den Punkten der die Kappe abschneidenden Ellipse, zu berechnen.

Er besteht aus dem Kegel mit der Höhe h, der auf der Ellipse steht, und der Kappe, ist also $\frac{1}{3} h g + K_e = \frac{1}{3} h g + \frac{1}{2} E - Z_h$, also

$$7) \qquad S_e = \tfrac{2}{3} a b \pi d,$$

wenn d die Dicke der Kappe. Für die Kugel ist die entsprechende Formel von Archimedes $\frac{2}{3} a \,.\, a \pi d$. Beide Formeln werden identisch, wenn man die Fläche f des zur Kappe gehörigen Hauptschnitts einführt, nämlich

$$8) \qquad S_e = \tfrac{2}{3} f d.$$